

MTA
DOKTORI ÉRTEKEZÉS

VÖRÖS GÁBOR

2008

**Merevített lemez és héj elemek méretezése,
mechanikai vizsgálata**

Írta

Vörös Gábor

aki a Magyar Tudományos Akadémia doktora
cím elnyerésére pályázik

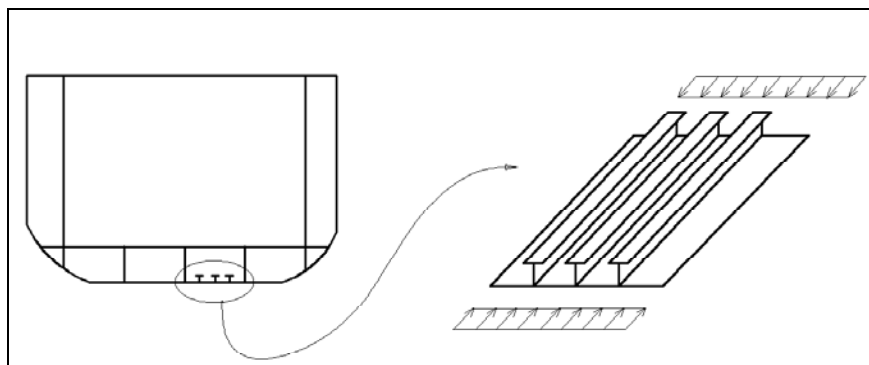
Budapest, 2008

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	2
1.1. Tudományos előzmények	2
1.2. Célkitűzések, vizsgálati módszerek	5
1.3. Fontosabb mennyiségek jelölése	8
2. EGYENES RÚDELEM ALAPEGYENLETEI	10
2.1. Elmozdulás vektor	10
2.2. Igénybevételek, keresztmetszeti jellemzők	13
2.3. A virtuális munka elve	14
2.3.1. A kezdeti terhelés munkája	19
2.3.2. A Timoshenko - Benscouter modell	22
2.3.3. A Timoshenko - Vlasov modell	23
2.3.4. A Bernoulli - Vlasov modell	23
2.4. A klasszikus modell vizsgálata	24
2.4. 1. Kezdeti belső erők munkája	26
2.5. A "VEM7" végeelem modell	28
3. PÉLDÁK A RUDMODELL ALKALMAZÁSÁRA	31
3.1. Keret kritikus terhelése	31
3.2. Csavart tengely stabilitása	33
3.3. Hajlított tengely szabad rezgései	36
4. MEREVÍTŐ ELEM KAPCSOLÁSA	43
4.1. Az "ST6" modell	43
4.2. Az "ST7" modell	44
4.2.1. Kezdeti kapcsoló erők excentricitása	46
5. MEREVÍTETT LEMEZ VIZSGÁLATA	49
5.1. Lemez szabad lengései	51
5.2. Nyomott lemez kritikus terhelése	54
5.3. Nyomott lemez szabad lengései	56
5.4. Hajlított lemez kritikus terhelése	57
6. ÖSSZEFOGLALÁS	61
6.1. Új tudományos eredmények	62
6.2. Hasznosítás lehetőségei	63
7. HIVATKOZÁSOK	64
7.1 Saját publikációk az értekezés témájából	67
FÜGGELÉKEK	
F1. Rudak csavarása és nyírása	68
F1.1. A csavarási vetemedési függvények tulajdonságai	68
F1.2. A nyíró faktor	71
F1.3. Keresztmetszeti jellemzők számítása	73
F2. A "VEM7" elem mátrixok	75

1. BEVEZETÉS

A vékonyfalú rudakkal merevített lemezszerkezetek fontos szerepet játszanak a nyomástartó készülékek, járművázak, tároló edények, konténerek, tartószerkezetek tervezésében, általában a könnyűszerkezetű, súlytakarékos teherviselő gépelemek kialakításában. Szilárdsági méretezésük, mechanikai tulajdonságaik vizsgálatának klasszikus módszerei az ortotrop lemez/héj vagy a térrács modellek elméletén alapultak. Ezek közös vonása, hogy a helyettesítő, fiktív lemez/héj vagy rúdrács modell keresztmetszeti és anyag jellemzőit a valódi szerkezet adataiból, különböző egyenértékűségi elvek szerint származtatták, (*Farkas* [21], *Michelberger*, *Fekete* [46], *Timoshenko* [66]) ezért elfogadható pontosságú eredményeket csak elegendően sűrű és egyenletes merevítő elem elosztású szerkezetekre adtak. Pontosabb vizsgálatokra a végelem eljárás keretében nyílik lehetőség.

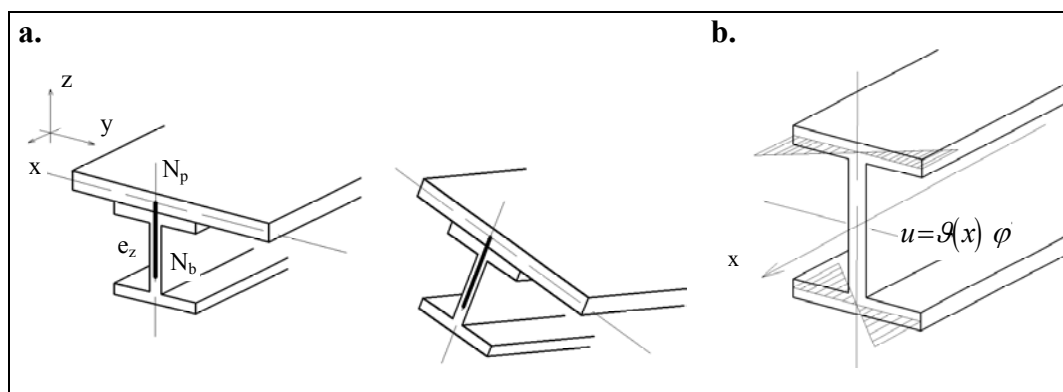


1.1. ábra. Merevített lemez elem alkalmazása

1.1. Tudományos előzmények

A merevített felületszerkezetek mechanikai viselkedésének elemzésére alkalmazott végelem modellekben különálló rúd és lemez/héj elemeket alkalmaznak, melyeknél a megfelelő csomópontokat egy fiktív merev kapcsolatnak megfelelő transzformációval kötik össze (1.2a. ábra). Ez a kapcsolási eljárás – ami az azonos forgás, lineáris elmozdulás kapcsolatot biztosítja – azt a közismert hipotézist alkalmazza, ami szerint a rúd eredetileg sík keresztmetszete a terhelési folyamat során sík marad. A merevítő elem csavarását is elemző munkák között érdemes megemlíteni *Barik*, *Mukhopadhyay* [6], *Bedair* [13], *Jirousek* [32], vagy a közelmúltból *Brubak*, *Hellesland* [17] publikációit. Ezekben a közleményekben a merevítő rúdnál azonban csak a *St-Venant* féle szabad csavarási hatást vették figyelembe, mivel a fiktív merev kapcsolódást leíró transzformáció nem tartalmazza a keresztmetszet csavarási vetemedésből (öblösödéséből) adódó hatásokat.

Ismeretes, hogy a csavart rúd keresztmetszete az alakváltozás során általában nem marad sík, vetemedik. Ha ezt az 1.2b. ábrán bemutatott csavarási vetemedést részben vagy egészben külső vagy belső kényszerek korlátozzák, akkor az jelentős hatással lehet a rúd feszültségi állapotára és az egész szerkezet mozgására. Ezt a jelenséget nevezzük gátolt csavarásnak. A gátolt csavarás klasszikus elméletének kidolgozása *Vlasov* [68] nevéhez fűződik. A csavarási vetemedés és így a gátlásának hatása különösen a vékonyszelvényű rudaknál lehet jelentős mértékű.



1.2. ábra. Rúd-lemez kapcsolás (a), vékony szelvény csavarási vetemedése (b).

Az önálló rúdszerkezetekre elvégzett vizsgálatok eredményekből tudható, hogy a gátolt csavarás hatása stabilitási és dinamikai jelenségek körében alapvetően megváltoztathatja a szerkezetek viselkedését. A rúd keresztmetszetében a csavaró/nyíró középpont (a csavarási forgás póluspontja) és a súlypont (tömegközéppont) közötti távolság, a geometria vagy a terhelés excentricitása következtében a csavaró és hajlító mozgások kapcsolódhatnak, ami jelentősen módosíthatja a kritikus terhelés vagy a sajátfrekvenciák értékét és a lengésképek alakját. Ez alapján feltételezhetjük, hogy merevített lemezszerkezeteknél is jelentős lehet a merevítő rúdelem torziós merevségének, excentricitásának vagy tömegeloszlásának közelítő vagy pontosabb modellezésének hatása. Erre vonatkozó mérési, és egyszerű számítási modellek eredményeit közlik többek között *Zheng, Yuren* [72], *Ghavami* [23], [24] és *Hughes, Ghosh, Chen* [29]. A merevítő rúdelem csavaró vetemedésének és a lemez membrán mozgásainak kapcsolására *Sapountzakis* és *Mokos* [57] egy érdekes, kétvonalas kapcsolási eljárást közöltek, ami elvileg megegyezik az [S2] publikációban leírtakkal.

Az átfogó elméleti vizsgálat és a publikációk hiányát talán magyarázza az, hogy statikus terheléseknél a rúdban a csavarási vetemedés korlátozása olyan járulékos, helyi feszültségeloszlást hoz létre, ami önmagában egyensúlyi, és ezért a méretezésnél, szilárdsági ellenőrzésnél másodlagos feszültségnek minősül. Alapvetően más a helyzet, ha a szerkezet globális jellemzőit, például a sajátfrekvenciákat, lengésképeket, stabilitásvesztést okozó

kritikus terheléseket vizsgáljuk, vagy másodrendű statikai, dinamikai számítást kell végezni, amikor az eredményeket – az önálló rúdszerkezethez hasonlóan – jelentősen módosíthatja a merevítő rúdelem torziós merevségének, a súlypont, nyíró középpont, terhelés excentricitásnak vagy tömegeloszlásának közelítő vagy pontosabb modellezése. Elvileg – és kellő kapacitás esetén gyakorlatilag is – persze lehetséges, hogy összetett, merevített felületszerkezetekben a rúdszerű alkatrészeket is lemez, héj vagy akár térbeli véges elemekkel modellezzük. Ennek következménye lehet, hogy a modell mérete, a szabadságfokok száma és a számítási idő hatványozottan növekszik, azonban ami még ennél is fontosabb, a modell áttekinthetősége romlik és ez az eredmények értelmezését, értékelését nehezíti. Jobb megoldás, ha az elemek tulajdonságait javítjuk és a modellezhető jelenségek körét, pontosságát a rúdelem szintjén növeljük. Ezt a célt követve megvizsgáljuk, hogy a merevítő elemek vonatkozásában a rúdelmélet keretén belül maradván milyen lehetőségek vannak a pontosabb modell megalkotására.

Gátolt csavaráskor a csavaró forgásnak a rúd hossz tengelye menti változása a erősen eltér a lineáris eloszlástól, ezért ezt a forgást is a hajlító mozgásokhoz hasonló pontossággal leíró rúdelem csomópontonként legalább hét szabadságfokú, ahol a három mozgás és három forgás mellett a hetedik szabadságfok a vetemedési paraméter, ami a *Vlasov* elmélet szerint lehet a fajlagos elcsavarodás. A kis forgások elméletére épülő, egyenes rudak lineáris statikai vizsgálatára alkalmas, csomópontonként hét szabadságfokú rúd végelem már régóta ismert, leírása megtalálható - többek között - *Iványi, Papp* [30], *Kiss* [41], *Kitipornchai* [42], *Sapkás, Kollár* [56], *Páczelt, Herpai* [49] vagy *Kollár* [43] munkáiban. Azonban már a nyolcvanas évek elején kiderült, hogy a kis forgások feltételezésével előállított hét szabadságfokú rúdelemkből álló modell nem alkalmas térbeli szerkezetek vizsgálatára. Ennek oka, amint azt *Argyris* [3], [4] kimutatta, a forgások nem kommutatív természete. A virtuális munka elvében, annak is a kezdeti terhelések és az elmozdulás növekmények kapcsolatát leíró részében a linearizálás következtében a csavaró és a hajlító nyomatékok eltérő módon követik a forgás növekményeket, más szóval a csavaró igénybevétel „kvázitangens” a hajlító igénybevételek pedig „szemitangens” tulajdonságúak lesznek. Ha ezek a nyomatéki igénybevételek nem függetlenek egymástól, ami például keretszerkezetnél vagy görbült elemeket is tartalmazó szerkezeteknél előfordulhat, a nem egytengelyű elemek csatlakozási pontjaiban a kezdeti nyomatéki egyensúlyi állapot a forgásnövekmények jellegétől függően megbomlik. A kicsi/nagy forgások problémája a modellnek az úgynevezett geometriai merevségét, és ezen keresztül a stabilitási, másodrendű statikai, dinamikai vagy a posztkritikus vizsgálatok körét érinti. A végelem módszer fejlődésének már a korai szakaszában megjelentek a

gyakorlatban is jól használható, csomópontonként hat szabadságfokú rúdelemek, azonban a hetedik – vetemedési vagy gátolt csavarási – szabadságfokot is tartalmazó elemek fejlesztése az előbbieken részletezett elvi nehézségek miatt a nyolcvanas évek elején megszakadt. Az elmúlt években a nagy számban megjelenő publikációk tanúsága szerint a hét szabadságfokú rúdelemek kutatása ismét napirendre került.

A nemlineáris mechanika eredményeinek és módszereinek felhasználásával *Kim MY* és szerzőtársai [34], [35] publikálták a véges (szemitangens) forgások és kis alakváltozások elméletére épülő virtuális munka elvét, amiből levezetett rúd végeelem modell már alkalmas térbeli szerkezetek dinamikai, kritikus terhelés vagy stabilitás vizsgálatára. Ettől kezdve egymás után jelentek meg az új elv alkalmazási körének bővítéséről szóló publikációk, például a nyírási alakváltozással is számoló *Timoshenko* rúdelmélet, stabilitási (kritikus terhelés), dinamikus stabilitási feladatok, posztkritikus állapot vizsgálata, kompozit anyagú, görbe vagy változó keresztmetszetű rudak alkalmazása. Kiragadott példaként említhetnénk *Kim* [37], [39], *Sabuncu* [55], *Teh* [61], *Turkalj*, *Brnic* [67] publikációit. Külön ki kell emelni *Kim*, *Jeon*, *Kim* 2005-ben megjelentetett, a rugalmas ágyazású rudak vizsgálatáról szóló [38] közleményét, ahol a szerzők az új elmélet alapján a rúd és egy másik rugalmas rendszer (az ágyazás) összekapcsolási lehetőségeit vizsgálták.

Ebbe a sorba illeszthető jelen dolgozat témaválasztása, a merevített felületszerkezetek vizsgálata, ahol a központi kérdés a rúd és egy másik mechanikai modell (lemez/héj) kapcsolása.

1.2. Célkitűzések, vizsgálati módszerek

Az előzőekben részletezett előzményekre alapozva, célunk egy olyan, a végeelem módszer keretein belül is használható eljárás elméleti alapjainak és alkalmazási lehetőségeinek kidolgozása, amely merevített felületszerkezetek rúdszerű alkatrészeiben a gátolt csavarás hatásának pontosabb vizsgálatára is alkalmas. Ennek kapcsán két alapvető kérdést kellett megoldani: egyik a csavarási mozgást is megfelelően leíró általános rúdelmélet illetve rúd végeelem modell megalkotása, a másik pedig a merevítő és a merevített lemez/héj elemek összekapcsolásának problémája. Már itt fontos megemlíteni, hogy a mozgások folytonosságának feltétele még az elmozdulás módszeren belül sem elégséges a feladat egyértelmű leírásához. Mivel rudaknál a terhelésnek a nyíróközépponthoz viszonyított excentricitása, az úgynevezett „load stiffness” hatás is lényeges, a merevítő rúdelemnél a kinematikai kapcsolat mellett a dinamikai mezők (a kapcsoló erőrendszer) illesztésére is szükség van.

Az elméleti kérdések tisztázása és megoldása után numerikus kísérletekre alkalmas algoritmust és számítógépi program környezetet kellett kialakítani. A kidolgozott eljárás ellenőrzésére összehasonlító vizsgálatokat végeztünk szakirodalmi adatok és héj végelem modelleken (COSMOS/M) végzett számítások eredményei alapján. Numerikus eredményeket elsősorban a lineáris stabilitás (kritikus terhelés) és a dinamika, időben állandó erőkkel terhelt merevített szerkezetek frekvencia és lengéskép számítása köréből mutatunk be.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\sigma^0)]\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (1.1)$$

alakú, ahol \mathbf{U} a csomóponti elmozdulás növekmény vektora, \mathbf{M} a tömeg, \mathbf{K}_L a lineáris merevség, \mathbf{K}_G a σ^0 kezdeti feszültségállapottól függő geometriai merevségi, vagy érintő merevségi mátrixok, és \mathbf{P} a külső terhelés növekményének vektora. A rugalmas rendszer elveszti stabilitását, ha egy $\lambda\sigma^0$ kezdeti statikus egyensúlyi állapothoz több lehetséges mozgásállapot tartozhat, azaz, zérus teher növekmény esetén is lehetséges nem zérus \mathbf{U} mozgás növekmény:

$$[\mathbf{K}_L + \lambda\mathbf{K}_G(\sigma^0)]\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

ahol λ a kritikus terhelés paramétere. A lineáris sajátérték feladat megoldása megadja a kritikus terhelést, de nem alkalmas az ezt követő „post-buckling” mozgások leírására, azok stabil vagy instabil jellegének megállapítására. Ilyen jellegű vizsgálatokra jelen dolgozat keretében nem térünk ki, mivel elsődleges cél a merevített szerkezetek mechanikai viselkedésének modellezésére alkalmas alap mennyiségek, a \mathbf{K}_L , \mathbf{K}_G és \mathbf{M} , mátrixok megalkotása. Az ω frekvenciájú periodikus mozgást vagy szabad lengést végző és állandó erőkkel terhelt lineárisan rugalmas szerkezet frekvencia és lengéskép számításának alapegyenlete a

$$[(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(\sigma^0)) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

sajátérték feladat.

A dolgozat tárgyának elméleti megalapozását a 2. és 4. fejezetekben ismertetjük, és a 3. és 5. fejezetekben a módszer ellenőrzésére, minősítésére alkalmas numerikus feladatokat mutatnak be. A 2. fejezetben a nagy forgások, kis alakváltozások elméletének felhasználásával levezetjük az egyenes rudak vizsgálatára alkalmas virtuális munka elveket és a *Bernoulli-Vlasov* elmélet alapján a végelem modell mátrixait. Igazoljuk, hogy ez a rúdmodell térbeli szerkezetek vizsgálatára is alkalmas, mivel az abban szereplő kezdeti belső

erők nyomatékai – a hajlító és a csavaró nyomatékok is – szemitangens tulajdonságúak. A 4. fejezetben levezetjük a rúd és lemez/héj elemek összekapcsolására alkalmas transzformációkat. A 3. és 5. fejezetekben ismertetett feladatokkal és numerikus megoldásokkal bemutatjuk – a szükséges és kötelező numerikus ellenőrzések mellett – a csomópontként hét szabadságfokú rúd végelem modell széleskörű, helyenként a szokásos gépészeti, mérnöki alkalmazások keretein túlmutató lehetőségeit. Ezek alapján is megállapítható, hogy az elmélet és a kapcsolódó végelem modell a célkitűzésekben megfogalmazott jelenségek vizsgálatára alkalmas.

Az eredmények további hasznosítása szempontjából szükség volt a rúd keresztmetszeti jellemzők számítására alkalmas algoritmus kidolgozására. Olyan számítógépi programrendszert készítettünk, ami tetszőleges geometriájú keresztmetszetre a statikai, stabilitási és dinamikai feladatokhoz szükséges geometriai jellemzőket, például a *Wagner* féle asszimetria jellemzőket, nyíró középpontot, vetemedési (öblösödési) tényezőt, stb. meghatározza. Ezt az eljárást használtuk fel a *FemDesign* végelem programrendszer fejlesztésénél is. (*Bojtár, Gáspár* [16], 270. oldal)

Röviden összefoglalva, a dolgozat fő célkitűzése annak vizsgálata, hogy merevített lemez és héjszerkezeteknél a merevítő rúdelem torziós jellemzőinek, excentricitásának vagy tömegeloszlásának közelítő vagy pontosabb modellezése milyen esetekben és milyen mértékben módosítja a számítási eredményeket.

1.3. Fontosabb mennyiségek jelölése

Latin betűs jelölések:

A	keresztmetszet területe
B	bimoment
C	rúd keresztmetszet geometriai középpontja
\mathbf{D}	különbségi forgástenzor
E	rugalmassági modulus
f_x, f_y, f_z	vonall mentén megoszló erőrendszer
F_x, F_y, F_z	koncentrált erő
G	csúsztató rugalmassági modulus
I_p	S nyíró középponti poláris másodrendű nyomaték
i_p	S nyíró középponti poláris inercia sugár
I_r, I_s	a C ponti fő másodrendű nyomatékok
I_ω	vetemedési (öblösödési) tényező
J	csavarási másodrendű nyomaték
\mathbf{k}_{Ge}	kezdeti külső erők geometriai merevségi elemmátrixa
\mathbf{k}_{Gi}	kezdeti belső erők geometriai merevségi elemmátrixa
\mathbf{k}_L	elem lineáris merevségi mátrixa
k_r, k_s	nyíró faktorok
M_r, M_s	C súlyponti hajlító igénybevételek
M_t	C súlyponti csavaró igénybevétel
M_1	S nyíró középponti csavaró igénybevétel
M_2, M_3	S nyíró középponti hajlító igénybevételek
M^q	kvázitangens nyomatékú erőpár
M^s	szemitangens nyomatékú erőpár
M_W	Wagner féle nyomaték
\mathbf{m}	elem tömeg mátrixa
N, N_1, N_2	csomópontok
N	húzó igénybevétel
P	külső terhelés támadáspontja
r, s	rúd keresztmetszet C ponti főtengelyei
S	nyíró/csavaró középpont
\mathbf{U}	lineáris elmozdulás növekmény vektor
\mathbf{U}^*	quadratikusan elmozdulás növekmény vektor

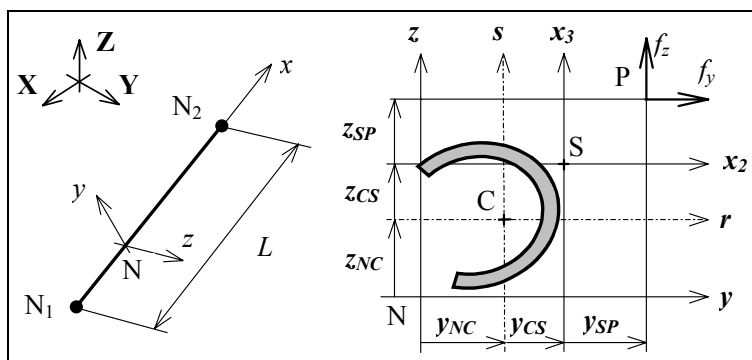
U_E	elem nyíró középponti változók mátrixa
u, v, w	az S nyíró középpont elmozdulásai
\bar{u}	átlagos tengelyirányú elmozdulást
u_x, u_y, u_z	az N csomóponti elmozdulások
V_r, V_s	nyíró igénybevételek
x, y, z	N csomóponti koordináta tengelyek
x_2, x_3	S nyíró középponti koordináta tengelyek
y_{CS}, z_{CS}	csavaró/nyíró középpont koordinátái
y_{SP}, z_{SP}	külső terhelés excentricitása

Görög betűs jelölések:

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	az N csomóponti forgások
α, β, γ	az S nyíró középponti forgások
$\beta_r, \beta_s, \beta_\omega$	keresztmetszet <i>Wagner</i> féle asszimetria jellemzői
δW	külső teher növekmény virtuális munkája.
λ	a kritikus terhelés paramétere
Π_{G1}, Π_{G2}	kezdeti feszültségekből származó energia változás
Π_{Ge}	kezdeti külső terhelések munkája a forgás növekményen
Π_L	linearizált alakváltozási energia
ρ	tömegsűrűség
$\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$	kvázitangens nyomatékú erőpárok irányszöge
ϑ	vetemedési paraméter
ϕ	a spirálforgás vektora
φ^C	a C ponthoz kapcsolt csavarási vetemedési függvény
φ	az S ponthoz kapcsolt csavarási vetemedési függvény
ψ_r, ψ_s	nyírási vetemedési függvények
Ω	a kis forgások tenzora
ω	sajátfrekvencia
ξ	rúd végeelem dimenziótlán hossz koordinátája.

2. EGYENES RÚDELEM ALAPEGYENLETEI

Az egyenes, L hosszúságú, tetszőleges, de állandó keresztmetszetű rúdelem koordináta rendszerei láthatóak a 2.1. ábrán. A keresztmetszet geometriai középpontja C és az r , s tengelyek a keresztmetszet főtengelyei. Ezekkel az irányokkal párhuzamosak az N csomóponti y , z és az S nyíró (csavaró) középponti x_2 , x_3 koordináta tengelyek. Az x irány párhuzamos a rúd tengelyével. A C , S és a külső koncentrált vagy vonal mentén megoszló terhelés P támadáspontjának helyzetét a keresztmetszet síkjában a tetszőleges helyzetű N csomópontból kiindulva, a 2.1. ábrán jelölt relatív koordinátákkal adjuk meg. Az N , C , S és P pontok szétválasztása a későbbiekben lehetővé teszi az excentrikus kapcsolódások kezelését.



2.1. ábra. Lokális koordináta rendszerek és excentricitások

A következőkben feltételezzük, hogy

- a keresztmetszet alakja a saját síkjában nézve nem változik,
- az alakváltozások kicsik,
- a rúd anyaga lineárisan rugalmas, homogén, izotróp,
- a csavarási vetemedési mozgás kicsi.
- a keresztmetszet csavarási vetemedése és az S pont helye szabad és gátolt csavarás esetén azonos (Vlasov, [68]),
- a csavaró és nyíró középpont egybeesik (Muttányánszky, [48], 261. oldal),
- a σ_r , σ_s , és τ_{rs} feszültségkomponensek elhanyagolhatóak.

2.1. Elmozdulás vektor

A b . feltétel szerint a keresztmetszet olyan mozgást végez, aminek része egy adott pont körüli forgás. A 2.2. ábra szerinti \mathbf{A} vektort az \mathbf{e} egységvektorral adott, álló tengely körül Θ szöggel az \mathbf{a} helyzetbe forgató transzformáció (Simmonds, [60], 58. oldal):

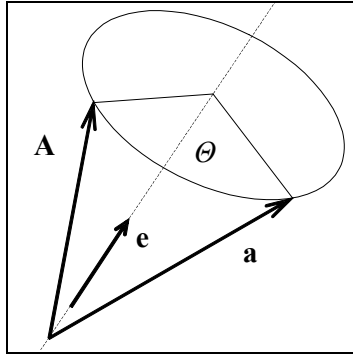
$$\mathbf{a} = \mathbf{A} \cos \Theta + (\mathbf{e} \times \mathbf{A}) \sin \Theta + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{A})(1 - \cos \Theta),$$

ami a szögfüggvények másodfokú közelítésével a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{a} \approx \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot \mathbf{A}, \quad (2.1)$$

ahol $\boldsymbol{\Omega}$ a kis forgások tenzora és \mathbf{I} az egységtenzor:

$$\cos \Theta \cong 1 - \frac{1}{2} \Theta^2, \quad \sin \Theta \cong \Theta, \quad \Theta \mathbf{e} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$



2.2. ábra. Végés forgás

Az elmozdulás vektor a keresztmetszet merevtestszerű mozgásának – amit az S pont körüli forgás és az S pont \mathbf{u}_S haladó mozgása ír le – és a síkra merőleges, kis mértékű \mathbf{u}_v csavarási vetemedés összege. A végés forgások (2.1) szerinti másodrendű közelítésével a rúd egy tetszőleges anyagi pontjának elmozdulás vektora, ami a pillanatnyi és a kezdeti helyzetek különbsége:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S + \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S) + \mathbf{u}_v - (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S) = \mathbf{U} + \mathbf{U}^*, \quad (2.2)$$

A 2.1. ábra jelöléseivel:

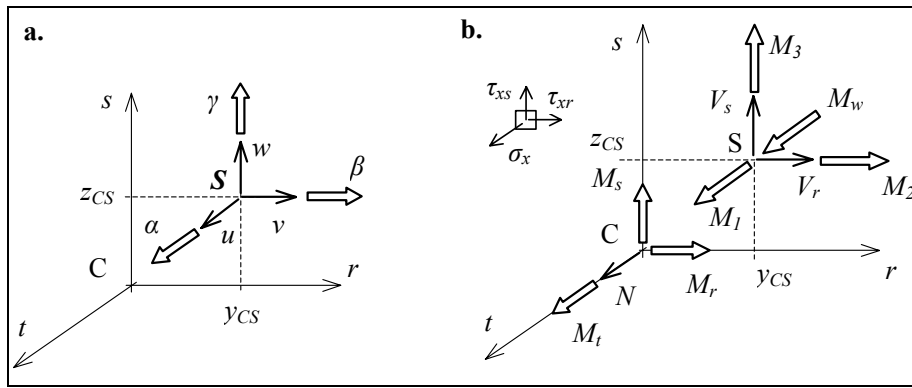
$$\mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_v = \begin{bmatrix} \vartheta\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} - \mathbf{R}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ r - y_{CS} \\ s - z_{CS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A (2.2) vektor lineáris és másodfokú részei:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{u}_S + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S) + \mathbf{u}_v = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u + \vartheta\varphi \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta(s - z_{CS}) - \gamma(r - y_{CS}) \\ -\alpha(s - z_{CS}) \\ \alpha(r - y_{CS}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + \vartheta\varphi + \beta x_3 - \gamma x_2 \\ v - \alpha x_3 \\ w + \alpha x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S) = \begin{bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \\ U_z^* \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha\beta(r - y_{CS}) + \alpha\gamma(s - z_{CS}) \\ -(\alpha^2 + \gamma^2)(r - y_{CS}) + \beta\gamma(s - z_{CS}) \\ \beta\gamma(r - y_{CS}) - (\alpha^2 + \beta^2)(s - z_{CS}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha\beta x_2 + \alpha\gamma x_3 \\ -(\alpha^2 + \gamma^2)x_2 + \beta\gamma x_3 \\ \beta\gamma x_2 - (\alpha^2 + \beta^2)x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.4b)
\end{aligned}$$

A (2.4a) egyenletben $\mathcal{G}(x)$ a vetemedési paraméter és $\varphi(r,s)$ jelöli a *St Venant* féle vetemedési függvényt, melynek tulajdonságait az F1. függelék 1. fejezete részletezi. Az u , v , w elmozdulások és az α , β , γ forgás paraméterek az S ponthoz kötött mennyiségek (2.3.a. ábra). Az $(u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta)$ hét mozgás paraméter mindegyike az x , illetve dinamikai feladatoknál az x és az idő függvénye. Vékonyfalú szelvényeknél a vetemedési függvény $\varphi = -\omega$, ahol ω a szektor terület függvény szokásos jelölése, [46], [52], [68].



2.3. ábra Mozgás paraméterek (a.) és igénybevételek (b.)

A (2.2) elmozdulás vektornak eltérő alakját kapjuk, ha a merevtest mozgás – vetemedés sorrendjét felcseréljük. Ha a keresztmetszet vetemedik és ezek után mint egy merev alakzat mozog, az elmozdulás vektor a (2.4a-b) komponensekkel a másodfokú tagokig bezárólag az

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{u}_s + \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S + \mathbf{u}_v) - (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S + \mathbf{u}_v) \approx \mathbf{U} + \mathbf{U}^* + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{u}_v \quad (2.2b)$$

alakban írható fel. Ezt alkalmazták, többek között *Kim MY* [33], *Pi, Trahair* [51] és *Turkalj, Brnic* [67], azonban a később bemutatandó virtuális munka elv "quadratizálása" során ebből a harmadik tag kiesik. Ez igazolta *Kim MY*, aki a későbbi publikációiban már a (2.2) elmozdulás vektort alkalmazta, [34], [35], [37].

A forgás középpontjának megválasztásában a szakirodalom nem egységes, találhatunk példát a C súlypont [35], [39], az S csavaró középpont [5], [28], [44], vagy a tetszőleges N pont [40] alkalmazására, sőt vegyes megoldásra is, amikor a hajlító forgások középpontja a C,

a csavaró forgásoké pedig az S pont [34], [37], [67]. Önálló rúdszerkezeteknél ezek a lehetőségek elfogadhatóak, néha hasznosak, de ha a rúdelemet más szerkezeti elemhez kapcsoljuk – amint azt a későbbiekben bemutatjuk – csak az S lehet a forgó mozgás pólusa.

2.2. Igénybevételek, keresztmetszeti jellemzők

A különböző rúdmodellekben általánosan elfogadott dinamikai hipotézis szerint a zérustól különböző feszültség koordináták a 2.3.b ábra szerinti σ_x normál és τ_{xr} , τ_{xs} csúsztató feszültségek. A normál feszültség a keresztmetszet alakjától függetlenül a

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_r}{I_r} s - \frac{M_s}{I_s} r + \frac{B}{I_\omega} \varphi \quad (2.5)$$

összefüggés szerint számolható. A nyírásból és a csavarásból származó csúsztató feszültségek eloszlása az F1 függelékben részletezett (F1.2), (F1.8), (F1.10) másodrendű peremérték feladatok pontos vagy közelítő megoldásával határozható meg. Az eloszlások konkrét formájától függetlenül a feszültségekkel egyenértékű húzó, nyíró, valamint a csavaró, hajlító nyomatéki igénybevételek a C súlyponti tengelyekre és a bimoment a következők:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA, \quad V_r = \int_A \tau_{xr} dA, \quad V_s = \int_A \tau_{xs} dA, \\ M_t &= \int_A (r\tau_{xs} - s\tau_{xr}) dA, \quad M_r = \int_A s\sigma_x dA, \quad M_s = -\int_A r\sigma_x dA, \quad B = \int_A \varphi \sigma_x dA. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A C súlyponti igénybevételekből a belső erők hajlító, csavaró nyomatékai valamint a *Wagner* féle nyomaték az S pontra, a 2.1. ábra szerinti x_2 és x_3 koordinátákkal:

$$\begin{aligned} M_{1r} &= -\int_A x_3 \tau_{xr} dA, \quad M_{1s} = \int_A x_2 \tau_{xs} dA, \\ M_I &= \int_A (x_2 \tau_{xs} - x_3 \tau_{xr}) dA = M_{1r} + M_{1s} = M_t - V_s y_{CS} + V_r z_{CS}, \\ M_2 &= \int_A x_3 \sigma_x dA = M_r - z_{CS} N, \\ M_3 &= -\int_A x_2 \sigma_x dA = M_s + y_{CS} N, \\ M_W &= \int_A (x_2^2 + x_3^2) \sigma_x dA = N i_p^2 + M_r \beta_r - M_s \beta_s + B \beta_\omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

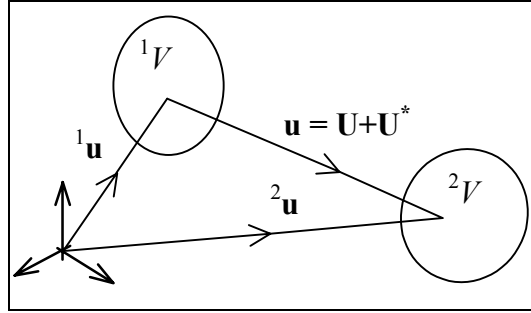
A (2.6), (2.7) összefüggésekben megjelenő keresztmetszeti jellemzők az A terület, az I_r , I_s fő másodrendű nyomatékok, az I_ω vetemedési (öblösödési) tényező, az I_p poláris másodrendű nyomaték és i_p inercia sugár valamint a β_r , β_s , β_ω *Wagner* féle asszimetria jellemzők:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A 1 \, dA, \quad I_r = \int_A s^2 \, dA, \quad I_s = \int_A r^2 \, dA, \quad I_\omega = \int_A \varphi^2 \, dA, \\
 I_p &= \int_A \left[(r - y_{CS})^2 + (s - z_{CS})^2 \right] dA = I_s + I_r + A(y_{CS}^2 + z_{CS}^2), \quad i_p^2 = \frac{I_p}{A}, \\
 \beta_r &= \frac{I}{I_r} \int_A s(r^2 + s^2) \, dA - 2z_{CS}, \quad \beta_s = \frac{I}{I_s} \int_A r(r^2 + s^2) \, dA - 2y_{CS}, \quad \beta_\omega = \frac{I}{I_\omega} \int_A \varphi(r^2 + s^2) \, dA.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

A csavaró/nyíró középpont y_{CS} , z_{CS} koordinátáit az F1. függelék (F1.4b) összefüggése szerint lehet kiszámítani. A (2.8) jellemzők kiszámítási módszerét az [S1] és [S6] cikkek részletezik.

2.3. A virtuális munka elve

A rúdelem tetszőleges mértékű mozgása véges számú, kis mozgás növekmények sorozatával írható le. A növekmény sorozatnak két egymás utáni elemét mutatja a 2.4. ábra, ahol a 1V a már meghatározott, ismert konfiguráció, – továbbiakban kezdeti állapot – a 2V az ezt követő, egyenlőre ismeretlen, meghatározandó konfiguráció.



2.4. ábra. Kezdeti állapot és a növekmény

A virtuális munka elvének a kezdeti állapotra vonatkoztatott, „update” *Lagrange* formája *Bathe* [8] jelöléseivel,

$$\int_{{}^1V} {}^2\mathbf{S} \cdot \delta({}^2\mathbf{H}) \, d{}^1V - \int_{{}^1V} {}^2\mathbf{q} \cdot \delta({}^2\mathbf{u}) \, d{}^1V - \int_{{}^1A} {}^2\mathbf{p} \cdot \delta({}^2\mathbf{u}) \, d{}^1A = 0, \tag{2.9}$$

ahol ${}^2\mathbf{S}$ a *II. Piola-Kirchhoff* feszültség tenzor, ${}^2\mathbf{H}$ a *Green-Lagrange* alakváltozási tenzor, ${}^2\mathbf{q}$ és ${}^2\mathbf{p}$ a térfogati és felületi terhelés és ${}^2\mathbf{u}$ a 2V konfigurációt megadó elmozdulás. Ebben az alfejezetben a vektor-tenzor mennyiségek leírására az indexes jelölésmódot és az ortogonális koordináta rendszerekben használatos összegzési konvenciót alkalmazzuk. A kontinuummechanikai mennyiségek értelmezése és a jelölésmód részletes leírása megtalálható többek között a [10], [11] vagy [60] könyvekben. Ennek megfelelően átírva a (2.9) virtuális munka elvet:

$$\int_{{}^1V} {}^2S_{ij} \delta({}^2H_{ij}) \, d{}^1V - \int_{{}^1V} {}^2q_i \delta({}^2u_i) \, d{}^1V - \int_{{}^1A} {}^2p_i \delta({}^2u_i) \, d{}^1A = 0. \tag{2.10}$$

A 2V konfigurációhoz tartozó terhelések és feszültségek felírhatóak mint a 1V kezdeti állapothoz tartozó értékek és a növekmények összege:

$${}^2q_i = {}^1q_i + q_i, \quad {}^2p_i = {}^1p_i + p_i, \quad {}^2S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + S_{ij}, \quad (2.11)$$

ahol ${}^1\tau_{ij}$ a *Cauchy* féle - vagy kezdeti - feszültségek tenzora. Hasonló módon, az elmozdulás növekmény és a virtuális elmozdulás

$${}^2u_i = {}^1u_i + u_i = {}^1u_i + U_i + U_i^*, \quad \delta({}^2u_i) = \delta u_i = \delta(U_i + U_i^*), \quad (2.12)$$

ahol felhasználtuk az elmozdulás vektor növekmény (2.2) szerinti felbontását. Ezzel a virtuális mozgásokból számolt *Green-Lagrange* féle virtuális alakváltozás

$$\begin{aligned} \delta({}^2H_{ij}) &= \delta H_{ij} = \delta \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \\ &= \delta \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j} + U_{i,j}^* + U_{j,i}^* + 0^3) \approx \delta (\varepsilon_{ij} + \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}^*) \end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2} U_{k,i} U_{k,j}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (U_{i,j}^* + U_{j,i}^*), \quad (2.13)$$

és a továbbiakban elhagyott rész:

$$0^3 = U_{k,i}^* U_{k,j} + U_{k,i} U_{k,j}^* + U_{k,i}^* U_{k,j}^*.$$

A feszültség és a lineáris alakváltozás növekmények kapcsolata a rúdelem anyagára tett feltételezésnek megfelelően lineáris, azaz

$$S_{ij} \delta(H_{ij}) \approx \frac{1}{2} \delta(S_{ij} \varepsilon_{ij}). \quad (2.14)$$

Ha a (2.11)-(2.13) felbontásokat és a (2.14) anyagtörvényt behelyettesítjük a virtuális munka elvének (2.10) alakjába, továbbá figyelembe véve, hogy az ismert kezdeti állapot megoldás, azaz a 1V konfigurációt meghatározó mennyiségekre a virtuális munka elve teljesül,

$$\int_{{}^1V} {}^1\tau_{ij} \delta(\varepsilon_{ij}) d{}^1V - \int_{{}^1V} {}^1q_i \delta(U_i) d{}^1V - \int_{{}^1A} {}^1p_i \delta(U_i) d{}^1A = 0, \quad (2.15)$$

a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} &\delta \left(\int_{{}^1V} \frac{1}{2} S_{ij} \varepsilon_{ij} d{}^1V + \int_{{}^1V} {}^1\tau_{ij} \eta_{ij} d{}^1V + \int_{{}^1V} {}^1\tau_{ij} \varepsilon_{ij}^* d{}^1V - \int_{{}^1V} {}^1q_i U_i^* d{}^1V - \int_{{}^1A} {}^1p_i U_i^* d{}^1A \right) \\ &\quad - \int_{{}^1V} q_i \delta u_i d{}^1V - \int_{{}^1A} p_i \delta u_i d{}^1A = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

vagy röviden

$$\delta(\Pi_L + \Pi_{G1} + \Pi_{G2} - \Pi_{Ge}) - \delta W = 0. \quad (2.17)$$

Itt az első Π_L tag a linearizált növekményekből származó alakváltozási energia, a második és harmadik ($\Pi_{G1} + \Pi_{G2}$) tag a kezdeti feszültségekből származó energia változás, a negyedik Π_{Ge} tag a kezdeti külső terhelések munkája a forgás növekményen és az utolsó tag a külső teher növekmény virtuális munkája.

A következőkben a rúdra vonatkozó virtuális munka elv felírásához a (2.16) általános elvbe behelyettesítjük a (2.13) tenzoroknak a (2.4a-b) elmozdulás koordinátákkal kifejtett alakjait. A (2.13) alakváltozási tenzorok koordinátái:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial s} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right). \quad (2.18a)$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} \right)^2 \right), \quad (2.18b)$$

$$\eta_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), \quad \eta_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial s} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \frac{\partial U_y}{\partial s} \right),$$

$$\varepsilon_{11}^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial r} + \frac{\partial U_y^*}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{13}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial s} + \frac{\partial U_z^*}{\partial x} \right). \quad (2.18c)$$

A (2.16)-(2.17) első, Π_L tagjában, mivel a rúdelem anyaga lineárisan rugalmas és homogén, az egyszerű *Hooke* törvény szerint

$$S_{11} = E \varepsilon_{11}, \quad S_{12} = 2G \varepsilon_{12}, \quad S_{13} = 2G \varepsilon_{13}, \quad (2.19)$$

valamint a (2.18a) alakváltozások és a (2.4a) elmozdulást helyettesítve, a keresztmetszetre vonatkozó integrálás elvégzése után a

$$\begin{aligned} \Pi_L &= \frac{1}{2} \int_V S_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \left[E \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + G \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial s} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L E \left[A(u' - \beta' z_{CS} + \gamma' y_{CS})^2 + I_r \beta'^2 + I_s \gamma'^2 + I_\omega \vartheta'^2 \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L G \left[A k_r ((v' - \gamma) + (\alpha' - \vartheta) z_{CS})^2 + A k_s ((w' - \beta) - (\alpha' - \vartheta) y_{CS})^2 \right. \\ &\quad \left. + (I_r + I_s - J)(\alpha' - \vartheta)^2 + J \alpha'^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

eredményt kapjuk, ahol az E és G a rugalmassági modulusok. Az integrálás során figyelembe vettük a $\varphi(r,s)$ vetemedési függvény F1. függelék (F1.3b-7b) tulajdonságait valamint a (2.8) szerinti keresztmetszeti jellemzőket. A (2.18a) és (2.19) összefüggések szerint, a keresztmetszet mozgására tett feltételezés miatt, a V_r és V_s nyíró igénybevételekhez a

keresztmetszetben állandó τ_{xr} , τ_{xs} nyíró feszültségek adódnak, ami nyilván közelítés, és így az ezekből kiszámított nyírási alakváltozási energia értéke is csak közelítésnek tekinthető. A (2.20) alakváltozási energia kifejezésben k_r és k_s nyíró faktorok a közelítő (állandó) és a pontos nyíró feszültségekből számolt alakváltozási energiák hányadosa. A nyíró faktorok definícióját és számítási módját az F1. függelék 2. fejezete és az [S6] publikáció ismerteti.

A (2.16) második és harmadik tagjában a kezdeti feszültségi állapot zérustól különböző koordinátái legyenek a (2.3.b) ábra szerinti feszültségkoordináták:

$${}^1\tau_{11} = \sigma_x, \quad {}^1\tau_{12} = \tau_{xr}, \quad {}^1\tau_{13} = \tau_{xs}. \quad (2.21)$$

A (2.16)-(2.17) második Π_{G1} tagja a (2.18b) tenzor koordináták és a (2.4a) elmozdulások helyettesítése után:

$$\begin{aligned} \Pi_{G1} = \int_V \tau_{ij} \eta_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} \right)^2 \right) dV \\ + \int_V \left[\tau_{xr} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \tau_{xs} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial s} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \frac{\partial U_y}{\partial s} \right) \right] dV. \end{aligned}$$

A továbbiakban ebből a kifejezésből az áthúzott tagot elhagyhatjuk, mivel azt a (2.20) első tagjával összeadva, a

$$\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 (E + \sigma_x) \approx \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 E \quad (2.22a)$$

egyszerűsítés jogossága belátható. Az aláhúzott tagokban ugyancsak nagyságrendi megfontolásból elhagyjuk a kismértékű csavarási vetemedés növekmény és a többi mozgás paraméter szorzatait:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial r} &= (u' + g'\varphi + \beta' x_3 - \gamma' x_2) \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \gamma \right) \approx (u' + \beta' x_3 - \gamma' x_2) (-\gamma), \\ \frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial s} &= (u' + g'\varphi + \beta' x_3 - \gamma' x_2) \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \beta \right) \approx (u' + \beta' x_3 - \gamma' x_2) (+\beta). \end{aligned} \quad (2.22b)$$

Ezen egyszerűsítés következtében tűnik el a (2.2) és a (2.2b) elmozdulás vektorok közötti különbség. Ezzel a (2.16) virtuális munka elv második tagja

$$\begin{aligned} \Pi_{G1} = \int_0^L \left[\frac{1}{2} N (v'^2 + w'^2) + \frac{1}{2} M_w \alpha'^2 - M_2 v' \alpha' - M_3 w' \alpha' + V_r (w' \alpha - u' \gamma) - V_s (v' \alpha - u' \beta) \right] dx \\ + \int_0^L (M_{1r} \beta' \gamma - M_{1s} \beta \gamma') dx + \int_0^L \int_A [\tau_{xr} x_2 (\alpha \alpha' + \gamma \gamma') + \tau_{xs} x_3 (\alpha \alpha' + \beta \beta')] dA dx, \end{aligned} \quad (2.23)$$

ahol felhasználtuk a normál feszültség (2.5) alakját, az igénybevételek és az M_W Wagner féle nyomaték (2.6)-(2.7) definícióit.

A (2.16)-(2.17) harmadik, Π_{G2} tagja a (2.18c) tenzor koordináták és a (2.4b) elmozdulások helyettesítésével

$$\begin{aligned}\Pi_{G2} &= \int_{V} \tau_{ij} e_{ij}^* dV = \int_{V} \left[\sigma_x \frac{\partial U_x^*}{\partial x} + \tau_{xr} \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial r} + \frac{\partial U_y^*}{\partial x} \right) + \tau_{xs} \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial s} + \frac{\partial U_z^*}{\partial x} \right) \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[M_2 (\alpha' \gamma + \alpha \gamma') - M_3 (\alpha' \beta + \alpha \beta') + V_r \alpha \beta + V_s \alpha \gamma + (M_{1s} - M_{1r}) (\beta' \gamma + \beta \gamma') \right] dx \quad (2.24) \\ &\quad - \int_0^L \int_A \left[\tau_{xr} x_2 (\alpha \alpha' + \gamma \gamma') + \tau_{xs} x_3 (\alpha \alpha' + \beta \beta') \right] dA dx ,\end{aligned}$$

ahol ismét felhasználtuk az igénybevételek (2.6) - (2.7) definícióit.

Ezek után a (2.23) és a (2.24) összege lesz a kezdeti belső erőkből származó energia változás:

$$\begin{aligned}\Pi_{Gi} &= \Pi_{G1} + \Pi_{G2} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[N (v'^2 + w'^2) + M_W \alpha'^2 + M_1 (\beta' \gamma - \beta \gamma') + M_2 (\alpha' \gamma + \alpha \gamma' - 2v' \alpha') \right. \\ &\quad \left. - M_3 (\alpha' \beta + \alpha \beta' + 2w' \alpha') + V_r (2w' + \beta) \alpha - V_s (2v' - \gamma) \alpha - 2(V_r \gamma - V_s \beta) u' \right] dx .\end{aligned} \quad (2.25)$$

ahol N , M_1 , M_2 , M_3 , V_r , V_s a rúdelem kezdeti állapotában a 2.3.b ábra szerinti húzó, csavaró, hajlító és nyíró igénybevételek, az u , v , w , α , β és γ pedig az S nyíró középponti mozgás növekmény paraméterek.

A (2.16) utolsó két tagja a külső térfogati és felületi teher növekmény virtuális munkája. Dinamikai feladatokban, időben gyorsan változó mozgás növekményeknél a $d'Alambert$ elv szerinti tehetetlenségi erő lesz a térfogati erő növekménye:

$$q_i = -\rho \ddot{u}_i = -\rho (\ddot{U}_i + \ddot{U}_i^*) .$$

Itt a két pont jelöli az idő szerinti második deriváltat és ρ a tömegsűrűség. Ezzel, valamint a virtuális mozgás növekmény (2.12) alakjával, a másodfokúnál magasabb kitevőjű tagokat elhagyva, a tehetetlenségi erő növekmény virtuális munkája

$$\delta W = \int_{V} q_i \delta u_i dV \approx - \int_{V} \rho \ddot{U}_i \delta U_i dV = \delta \Pi_M ,$$

ami a (2.4a) helyettesítése és a keresztmetszeti integrálok elvégzése után

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_M = & - \int_0^L \rho \left[A \left(\ddot{u} - \ddot{\beta} z_{CS} + \ddot{\gamma} y_{CS} \right) (\delta u - z_{CS} \delta \beta + y_{CS} \delta \gamma) \right. \\
 & + A \left(\ddot{v} + \ddot{\alpha} z_{CS} \right) \delta v + A \left(\ddot{w} - \ddot{\alpha} y_{CS} \right) \delta w \\
 & \left. + A \left(\ddot{v} z_{CS} - \ddot{w} y_{CS} + \ddot{\alpha} i_p^2 \right) \delta \alpha + I_s \ddot{\gamma} \delta \gamma + I_r \ddot{\beta} \delta \beta + I_\omega \ddot{\gamma} \delta \gamma \right] dx.
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

A további külső erő növekmények munkája az ismert módon számítható, [49], [54], [74]. Mivel a jelen dolgozatban vizsgált feladattípusok – kritikus terhelés, lengéskép, sajátfrekvencia számítása – nagy részénél ilyen terhelések nincsenek, ezek további részletezésétől itt eltekintünk.

2.3.1. A kezdeti terhelés munkája

A (2.16) elvben negyedik és ötödik Π_{Ge} tag a kezdeti külső terhelések munkája a forgás növekményen, ami a rúdelem A_p felületén működő p_x, p_y, p_z megoszló terhelésekből a

$$\begin{aligned}
 \Pi_{Ge}(p) = & \int_{A_p} p_i U_i^* dA = \frac{1}{2} \int_{A_p} \left[p_x \left(\beta \alpha (r - y_{CS}) + \gamma \alpha (s - z_{CS}) \right) \right. \\
 & \left. + p_y \left(\gamma \beta (s - z_{CS}) - (\alpha^2 + \gamma^2) (r - y_{CS}) \right) + p_z \left(\gamma \beta (r - y_{CS}) - (\alpha^2 + \beta^2) (s - z_{CS}) \right) \right] dx
 \end{aligned}$$

összefüggés szerint számolható. Ez alapján felírhatjuk 2.1. ábrán jelölt P ponton átmenő vonal mentén megoszló f_x, f_y, f_z , vagy a j jelű keresztmetszet P pontjában ható F_x, F_y, F_z koncentrált excentrikus kezdeti terhelések munkáját is:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{Ge}(f) = & \int_{L_f} f_i U_i^* dx \\
 = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[f_x (z_{SP} \gamma + y_{SP} \beta) \alpha + f_y \left(\beta \gamma z_{SP} - (\alpha^2 + \gamma^2) y_{SP} \right) + f_z \left(\beta \gamma y_{SP} - (\alpha^2 + \beta^2) z_{SP} \right) \right] dx,
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{Ge}(F) = & \left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^* \right]_j \\
 = & \frac{1}{2} \left[F_x (z_{SP} \gamma + y_{SP} \beta) \alpha + F_y \left(\beta \gamma z_{SP} - (\alpha^2 + \gamma^2) y_{SP} \right) + F_z \left(\beta \gamma y_{SP} - (\alpha^2 + \beta^2) z_{SP} \right) \right]_j.
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

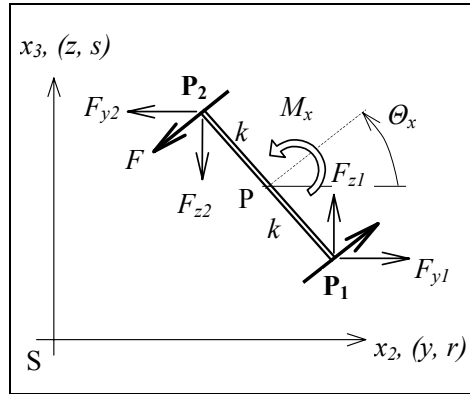
A kezdeti külső terhelés anyagi ponthoz kötött konzervatív erőrendszer, ami azt jelenti, hogy a mozgás növekményekkel a támadáspontok elmozdulnak, de az erők iránya változatlan.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha a rúdra ható kezdeti külső terhelés koncentrált erőpár, ami két azonos nagyságú, egymáshoz közel lévő, párhuzamos hatásvonalú, de ellenkező irányítású koncentrált erővel egyenértékű. Ha a Π_{Ge} (2.28) kifejezésében az F erő P támadáspontjának az S nyíró középponthez viszonyított koordinátái a 2.1. ábrának megfelelően x_{SP}, y_{SP} és z_{SP} , akkor ebben a pontban a (2.4b) \mathbf{U}^* vektort részletesen kifejtve:

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_S) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -x_{SP}(\beta^2 + \gamma^2) + y_{SP}\alpha\beta + z_{SP}\alpha\gamma \\ x_{SP}\alpha\beta - y_{SP}(\alpha^2 + \gamma^2) + z_{SP}\beta\gamma \\ x_{SP}\alpha\gamma + y_{SP}\beta\gamma - z_{SP}(\alpha^2 + \beta^2) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Először legyen a j jelű keresztmetszetben egy M_x csavaró nyomaték, ami egyenértékű a 2.5 ábra szerinti, $F = M_x/2k$ nagyságú és Θ_x irányú erőpárral. A \mathbf{P}_1 és \mathbf{P}_2 pontokban ható erők felbonthatóak a keresztmetszet r, s főtengelyei irányú komponensekre:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1: & x_{SP1} = 0, \quad y_{SP1} = y_{SP} + k \sin \Theta_x, \quad z_{SP1} = z_{SP} - k \cos \Theta_x, \quad F_{y1} = F \cos \Theta_x, \quad F_{z1} = F \sin \Theta_x, \\ \mathbf{P}_2: & x_{SP2} = 0, \quad y_{SP2} = y_{SP} - k \sin \Theta_x, \quad z_{SP2} = z_{SP} + k \cos \Theta_x, \quad F_{y2} = -F \cos \Theta_x, \quad F_{z2} = -F \sin \Theta_x. \end{aligned}$$



2.5. ábra. Csavaró erőpár felbontása

Ezzel a kezdeti terhelő erőpár négy erőkomponensének az eredő (2.28) munkája a (2.29) mozgás növekményen:

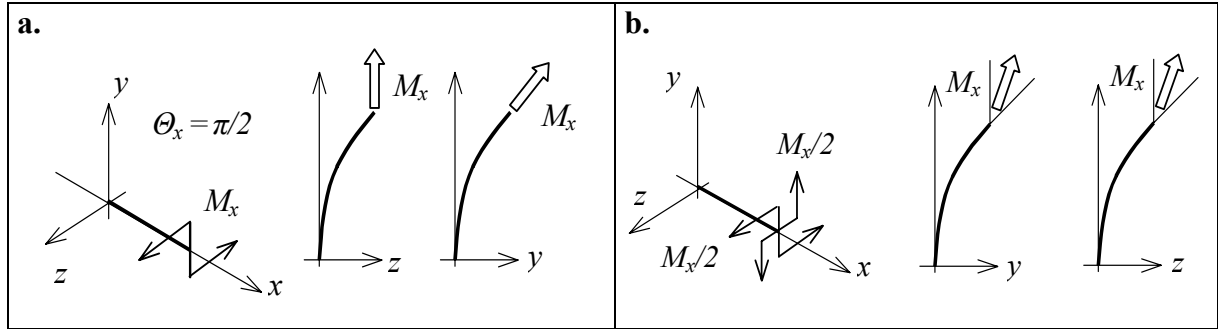
$$\begin{aligned} \Pi_{Ge} = \frac{1}{2} & \left[F \cos \Theta_x \left(\beta\gamma (z_{SP} - k \cos \Theta_x) - (\alpha^2 + \gamma^2)(y_{SP} + k \sin \Theta_x) \right) \right. \\ & - F \cos \Theta_x \left(\beta\gamma (z_{SP} + k \cos \Theta_x) - (\alpha^2 + \gamma^2)(y_{SP} - k \sin \Theta_x) \right) \\ & + F \sin \Theta_x \left(\beta\gamma (y_{SP} + k \sin \Theta_x) - (\alpha^2 + \beta^2)(z_{SP} - k \cos \Theta_x) \right) \\ & \left. - F \sin \Theta_x \left(\beta\gamma (y_{SP} - k \sin \Theta_x) - (\alpha^2 + \beta^2)(z_{SP} + k \cos \Theta_x) \right) \right]_j. \end{aligned}$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, rendezés után a

$$\Pi_{Ge} = \frac{1}{2} M_x \left[(\beta^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_x}{2} - \beta\gamma \cos 2\Theta_x \right]_j \quad (2.30)$$

eredményt kapjuk. Az M_x nyomatékú kezdeti erőpár munkája függ az erőpárt alkotó erők Θ_x irányszögétől is. Ezt szemlélteti a 2.6a. ábra, ahol a keresztmetszet forgás növekményének irányától függően az anyagi ponthoz kötött erőpár nyomatékának iránya állandó, vagy érintő irányú. Az ilyen tulajdonságú erőpárt, illetve a nyomatékát – *Argyris* [3], [4] nyomán – kvázitangens nyomatéknak

nevezzük. Az erőpárt alkotó erők a mozgó anyagi ponthoz kötött, állandó irányú vektorok.

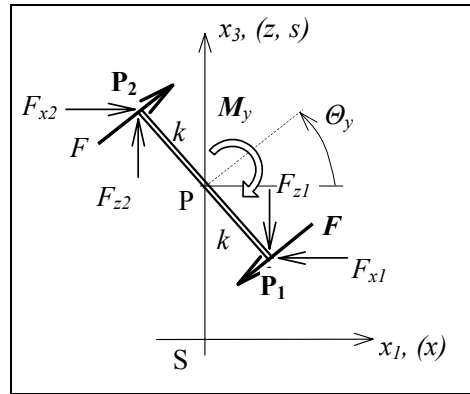


2.6. ábra. Kvázitangens (a.) és szemitangens (b.) csavaró erőpár

Az M_x csavaró nyomaték a 2.6b. ábra szerinti két $M_x/2$ nyomatékú, egymásra merőleges erőpárral is előállítható. Ilyenkor a keresztmetszet forgás növekményének irányától függetlenül az erőpárok eredő nyomatéka a keresztmetszeti forgás szögfelezője irányába mutat. Az ilyen tulajdonságú nyomatékot szemitangens nyomatéknak nevezzük. Az M_x nyomatékú szemitangens erőpár munkája a (2.30) egyenletből először az $M_x/2$, Θ_x majd az $M_x/2$, $\Theta_x + \pi/2$ helyettesítéssel számítható. Mivel

$$\sin 2(\Theta_x + \pi/2) = -\sin 2\Theta_x, \quad \cos 2(\Theta_x + \pi/2) = -\cos 2\Theta_x,$$

a (2.30) alapján belátható, hogy a szemitangens kezdeti csavaró erőpár munkája $\Pi_{Ge} = 0$.



2.7. ábra. M_y hajlító erőpár felbontása

Hasonló módon számítható az M_y nyomatékú kvázitangens hajlító erőpár (2.28) munkája a (2.29) mozgás növekményeken. A 2.7. ábra szerinti felbontással, ahol $F = M_y/2k$, a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1: x_{SP1} &= k \sin \Theta_y, \quad y_{SP1} = y_{SP}, \quad z_{SP1} = z_{SP} - k \cos \Theta_y, \quad F_{x1} = -F \cos \Theta_y, \quad F_{z1} = -F \sin \Theta_y, \\ \mathbf{P}_2: x_{SP2} &= -k \sin \Theta_y, \quad y_{SP2} = y_{SP}, \quad z_{SP2} = z_{SP} + k \cos \Theta_y, \quad F_{x2} = F \cos \Theta_y, \quad F_{z2} = F \sin \Theta_y. \end{aligned}$$

helyettesítés és rendezés után a

$$\Pi_{Ge} = \frac{1}{2} M_y \left[-(\alpha^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_y}{2} + \alpha \gamma \cos 2\Theta_y \right]_j$$

eredményt kapjuk. Ebből, ha az M_y szemitangens nyomatékú, ami két kvázitangens nyomatékú erőpár eredője, az $M_y/2$, Θ_y és az $M_y/2$, $\Theta_y + \pi/2$ helyettesítéssel most is a $\Pi_{Ge} = 0$ eredményt kapjuk.

Ezzel igazoltuk a következő megállapítást: A rúdra működő, kvázitangens nyomatékú kezdeti terhelő erőpárok munkája a forgás növekményeken:

$$\begin{aligned} \Pi_{Ge}(M^q) = & \frac{1}{2} \left[M_x \left((\beta^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_x}{2} - \beta\gamma \cos 2\Theta_x \right) \right. \\ & - M_y \left((\alpha^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_y}{2} - \alpha\gamma \cos 2\Theta_y \right) \\ & \left. + M_z \left((\alpha^2 - \beta^2) \frac{\sin 2\Theta_z}{2} - \alpha\beta \cos 2\Theta_z \right) \right]_j, \end{aligned} \quad (2.31)$$

a szemitangens tulajdonságú kezdeti terhelő erőpárok munkája pedig:

$$\Pi_{Ge}(M^s) = 0. \quad (2.32)$$

2.3.2. A Timoshenko – Bescoter modell

Az előzőekben felírt (2.20) és (2.25) részeredményeket összeadva, a (2.17) virtuális munka elv alakja

$$\begin{aligned} & \delta(\Pi_L + \Pi_{Gi} - \Pi_{Ge}) - \delta\Pi_M - \delta W \\ & = \delta \frac{1}{2} \int_0^L E \left[A(u' - \beta' z_{CS} + \gamma' y_{CS})^2 + I_r \beta'^2 + I_s \gamma'^2 + I_\omega \vartheta'^2 \right] dx \\ & + \delta \frac{1}{2} \int_0^L G \left[Ak_r ((v' - \gamma) + (\alpha' - \vartheta) z_{CS})^2 + Ak_s ((w' - \beta) - (\alpha' - \vartheta) y_{CS})^2 \right. \\ & \quad \left. + (I_r + I_s - J)(\alpha' - \vartheta)^2 + J\alpha'^2 \right] dx \\ & + \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_1(\beta'\gamma - \beta\gamma') + M_2(\alpha'\gamma + \alpha\gamma' - 2v'\alpha') - M_3(\alpha'\beta + \alpha\beta' + 2w'\alpha') \right. \\ & \quad \left. + M_w \alpha'^2 + V_r(2w' + \beta)\alpha - V_s(2v' - \gamma)\alpha - 2(V_r\gamma - V_s\beta)u' \right] dx \\ & - \delta\Pi_{Ge} - \delta\Pi_M - \delta W = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

ahol a Π_{Ge} a kezdeti terheléstől függően (2.27), (2.28) vagy (2.31), a $\delta\Pi_M$ pedig (2.26) szerinti. Ebben a legáltalánosabb alakú elvben hét valóban független paraméter szerepel. Régóta ismert, de viszonylag kevés publikáció foglalkozik *Bescoter* [14] elméletével, aki a *Vlasov* elmélet továbbfejlesztéseként a csavarási forgást és a vetemedési paramétert független változóknak tekintette. Szakirodalmi közlések szerint ez az elmélet elsősorban a zárt vékonyszelvényű rudak estén lehet hasznos. A *Bescoter* féle elmélet alkalmazása során a Π_L

(2.20) alakjához hasonló energia kifejezést használtak statikai számításokhoz *Shakourzadeh*, *Batoz* [58] és zárt szelvényű egyenes rudak dinamikai vizsgálatáról közölt eredményeket *Cortinez* [19].

A kezdeti igénybevételeket tartalmazó, (2.25) szerinti Π_{Gi} megegyezik *MY Kim* és szerzőtársai [34] által közölt alakkal, de ott a mozgásparaméterek a C súlyponthoz kötött mennyiségek, továbbá a (2.33) egyenletben aláhúzott tagot, az axiális mozgás hatását elhagyták. Ez a tag egyenes rúdnál valóban elhanyagolható, de *Lim* [44] vagy *Gu* [26] eredményei szerint görbe rudaknál, térbeli keretszerkezeteknél hatása fontos lehet.

2.3.3. A Timoshenko – Vlasov modell

A gátolt csavarás *Vlasov* elméletének alap feltételezése szerint a vetemedési paraméter a fajlagos elcsavarodás:

$$\vartheta = \alpha' . \quad (2.34)$$

Ezt a belső kinematikai kényszert beírva a (2.33) elvbe, a nyírási alakváltozásokat is számításba vevő, közismert *Timoshenko* féle rúdmodellre érvényes virtuális munka elvet kapjuk:

$$\begin{aligned} & \delta(\Pi_L + \Pi_{Gi} - \Pi_{Ge}) - \delta\Pi_M - \delta W \zeta \\ &= \delta \frac{1}{2} \int_0^L E \left[A(u' - \beta' z_{cs} + \gamma' y_{cs})^2 + I_r \beta'^2 + I_s \gamma'^2 + I_\omega \alpha'^2 \right] dx \\ &+ \delta \frac{1}{2} \int_0^L G \left[A k_r (v' - \gamma)^2 + A k_s (w' - \beta)^2 + J \alpha'^2 \right] dx \\ &+ \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_1(\beta' \gamma - \beta \gamma') + M_2(\alpha' \gamma + \alpha \gamma' - 2v' \alpha') - M_3(\alpha' \beta + \alpha \beta' + 2w' \alpha') \right. \\ &\quad \left. + M_w \alpha'^2 + V_r(2w' + \beta) \alpha - V_s(2v' - \gamma) \alpha - 2(V_r \gamma - V_s \beta) u' \right] dx \\ &- \delta \Pi_{Ge} - \delta \Pi_M - \delta W = 0 . \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.4. A Bernoulli – Vlasov modell

A klasszikus rúdelméletek közismert, *Bernoulli*, vagy *Euler-Bernoulli* geometriai hipotézise szerint a lehajlások és a forgások kapcsolata:

$$\beta = -w', \quad \gamma = v' . \quad (2.36)$$

Ezzel a (2.35) virtuális munka elvének a *Bernoulli-Vlasov* rúdmodellre érvényes alakja:

$$\begin{aligned}
& \delta(\Pi_L + \Pi_{Gi} - \Pi_{Ge}) - \delta\Pi_M - \delta W \\
&= \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA(u' + w'' z_{CS} + v'' y_{CS})^2 + EI_r w''^2 + EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ \alpha'^2 \right] dx \\
&+ \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_1(v'' w' - v' w'') + M_2(v'' \alpha - v' \alpha') + M_3(w'' \alpha - w' \alpha') \right. \\
&\quad \left. + M_w \alpha'^2 + V_r w' \alpha - V_s v' \alpha - 2(V_r v' + V_s w') u' \right] dx \\
&- \delta\Pi_{Ge} - \delta\Pi_M - \delta W = 0.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ahol $\delta\Pi_{Ge}$ a kezdeti terheléstől függően – vonal mentén megoszló, koncentrált erő vagy kvázitangens nyomatékú erőpár – a (2.27), (2.28) vagy a (2.31) alapján

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{Ge} = & \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[f_x(z_{SP} v' - y_{SP} w') \alpha \right. \\
& \left. - f_y(w' v' z_{SP} + (\alpha^2 + v'^2) y_{SP}) - f_z(w' v' y_{SP} + (\alpha^2 + w'^2) z_{SP}) \right] dx \\
& + \delta \frac{1}{2} \left[F_x(z_{SP} v' - y_{SP} w') \alpha \right. \\
& \left. - F_y(w' v' z_{SP} + (\alpha^2 + v'^2) y_{SP}) - F_z(w' v' y_{SP} + (\alpha^2 + w'^2) z_{SP}) \right]_i \\
& + \delta \frac{1}{2} \left[M_x^q \left((w'^2 - v'^2) \frac{\sin 2\Theta_x}{2} + w' v' \cos 2\Theta_x \right) \right. \\
& \left. - M_y^q \left((\alpha^2 - v'^2) \frac{\sin 2\Theta_y}{2} - \alpha v' \cos 2\Theta_y \right) + M_z^q \left((\alpha^2 - w'^2) \frac{\sin 2\Theta_z}{2} + \alpha w' \cos 2\Theta_z \right) \right]_j,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

a $\delta\Pi_M$ pedig a (2.26) általános kifejezésből a (2.34) és (2.36) belső kinematikai kényszerfeltételek helyettesítésével:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_M = & - \int_0^L \rho \left[A(\ddot{u} + \ddot{w}' z_{CS} + \ddot{v}' y_{CS})(\delta u + z_{CS} \delta w' + y_{CS} \delta v') \right. \\
& + A(\ddot{v} + \ddot{\alpha} z_{CS}) \delta v + A(\ddot{w} - \ddot{\alpha} y_{CS}) \delta w + A(\ddot{v} z_{CS} - \ddot{w} y_{CS} + \ddot{\alpha} t_p^2) \delta \alpha \\
& \left. + I_s \ddot{v}' \delta v' + I_r \ddot{w}' \delta w' + I_\omega \ddot{\alpha}' \delta \alpha' \right] dx.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.4. A klasszikus modell vizsgálata

A rudak vizsgálatához már régóta használt, közismert virtuális munka elvet – többek között *Vlasov* [68], *Timoshenko* [65], *Washizu* [69] nyomán – a kis forgások feltételezéséből kiindulva írhatjuk fel. Ha a (2.2) elmozdulás vektorban a másodrendű U^* tagot elhagyjuk, akkor a (2.16) - (2.17) virtuális munka elvben az ehhez kapcsolódó részek kimaradnak:

$$\delta \left(\int_{V} \frac{1}{2} S_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_V \tau_{ij} \eta_{ij} dV \right) - \int_V q_i \delta u_i dV - \int_A p_i \delta u_i dA = 0 ,$$

vagy röviden a már bevezetett jelölésekkel:

$$\delta(\Pi_L + \Pi_{G1}) - \delta W = 0 . \quad (2.40)$$

Már itt is látszik, ha a linearizált elmozdulás mezőből indulunk ki, akkor a virtuális munka elvének kvadratikus alakjából lényeges elemek kimaradnak. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a túl korai linearizálásnak mi a következménye.

A (2.23) szerinti Π_{G1} átalakításához a szakirodalomban szokásos utat követve a következő két feltételezést alkalmazzuk (Ziegler, [73]) :

$$M_{1r} = M_{1s} = M_1 / 2 , \quad \int_A \tau_{xr} x_2 dA = -V_r y_{SP} , \quad \int_A \tau_{xs} x_3 dA = -V_s z_{SP} . \quad (2.41)$$

Az M_{1r} , M_{1s} és M_1 definíciói a (2.7) egyenletek. Az első feltétel szimmetrikus keresztmetszetekre, a második és harmadik állandó csúsztató feszültség eloszlásokra pontosan teljesül. Ha feltételezzük, – bár ez pontosan nem mindig igazolható – hogy a (2.41) keresztmetszet alakjától és a feszültségeloszlás jellegétől függetlenül minden esetben érvényes, akkor azt a (2.23)-ba helyettesítve, a (2.40) virtuális munka elvben szereplő tagok:

$$\begin{aligned} & \delta(\Pi_L + \Pi_{G1}) - \delta W \\ &= \delta \Pi_L + \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_w \alpha'^2 + M_1(\beta' \gamma' - \beta \gamma') - 2M_2 v' \alpha' - 2M_3 w' \alpha' \right] dx \\ &+ \delta \int_0^L \left[V_r w' \alpha' - V_s v' \alpha' + (V_s \beta - V_r \gamma) u' - V_r y_{SP}(\alpha \alpha' + \gamma \gamma') - V_s z_{SP}(\alpha \alpha' + \beta \beta') \right] dx - \delta W . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Itt a Π_L kifejezése ugyanaz, mint a (2.20), mert abban nem jelenik meg az \mathbf{U}^* vektor. Ebből a klasszikus *Bernoulli – Vlasov* modell a (2.34) és (2.36) belső kinematikai kényszerfeltételek helyettesítésével:

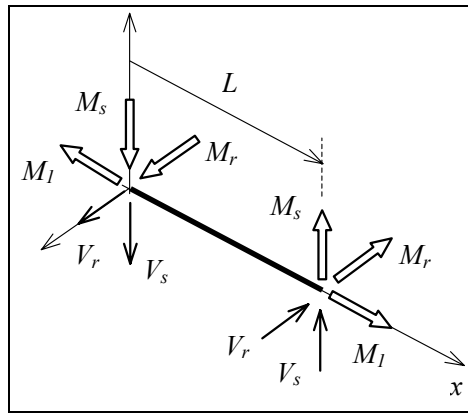
$$\begin{aligned} & \delta(\Pi_L + \Pi_{G1}) - \delta W = \\ &= \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA(u' + w'' z_{CS} + v'' y_{CS})^2 + EI_r w''^2 + EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ \alpha'^2 \right] dx \\ &+ \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_w \alpha'^2 + M_1(v'' w' - v' w'') - 2M_2 v' \alpha' - 2M_3 w' \alpha' \right] dx \\ &+ \delta \int_0^L \left[V_r w' \alpha' - V_s v' \alpha' - (V_r v' + V_s w') u' - V_r y_{SP}(\alpha \alpha' + v' v'') - V_s z_{SP}(\alpha \alpha' + w' w'') \right] dx - \delta W , \end{aligned} \quad (2.43)$$

formában írható fel, amiből kiindulva a $V_r = -M'_s$, $V_s = M'_r$, $V'_r = -f_y$, $V'_s = -f_z$ egyensúlyi egyenletek, a (2.7) egyenértékűségi egyenletek, különböző integrál átalakítások és

egyszerűsítések felhasználásával további, az egyenes rúdelemre alkalmazható klasszikus elv formákat lehet levezetni. (Attard [5], Kiss [41], Kitipornchai [42], Mohri [47]) Ezek részletezése jelen dolgozatnak nem célja.

2.4.1. Kezdeti belső erők munkája

A lineáris elmozdulás mezőre épülő (2.42) és a nagy forgások hatását is tartalmazó (2.33) Timoshenko – Bencsoter elmélet szerinti elveket összehasonlítva, látszik hogy az M_2 , M_3 nyomatékok és a V_r , V_s nyíró igénybevételek együttthatóiban van lényeges különbség. Vizsgáljuk meg az eltérések jellegét és értelmét!



2.8. ábra. Rúdvégi igénybevételek - terhelések

Vágjunk ki a rúdból egy L hosszúságú, egyenes tengelyű részt, ahol a rúdszakasz végein a belső erőrendszer komponensei, mint kezdeti külső terhelések jelennek meg (2.8. ábra). Tételezzük fel, hogy nincs kezdeti húzó igénybevétel, a végponti terhektől eltekintve az L szakasz terheletlen, a nyíró igénybevételek hatásvonala átmegy az S nyíróközépponton, továbbá a rúdelem mozgása lassú és nincs teher növekmény:

$$N = 0, \quad M_2 = M_r, \quad M_3 = M_s, \quad y_{SP} = z_{SP} = 0, \quad \Pi_M = 0, \quad W = 0. \quad (2.44)$$

Ezek az egyszerűsítések a következő vizsgálat lényegét nem érintik. Tételezzük fel továbbá, hogy az M_1 csavaró nyomaték szemitangens, az M_2 és az M_3 hajlító nyomatékok pedig kvázitangens tulajdonságúak:

$$\begin{aligned} F_y(L) &= V_r(L), & F_y(0) &= -V_r(0), \\ F_z(L) &= V_s(L), & F_z(0) &= -V_s(0), \\ M_x^s(L) &= M_1(L), & M_x^s(0) &= -M_1(0) \\ M_y^q(L) &= M_r(L), & M_y^q(0) &= -M_r(0), & \Theta_y &= 0, \\ M_z^q(L) &= M_s(L), & M_z^q(0) &= -M_s(0), & \Theta_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A vizsgált L szakaszra alkalmazzuk a (2.33) virtuális munka elvet. A kezdeti külső terhelések

– a 2.8. ábra szerinti rúdvégi erők és nyomatékok – munkája a forgás növekményen a (2.28), (2.31) és (2.32) összege, de ebből most csak a kvázitangens nyomatékok (2.31) munkája lesz zérustól különböző, ami a (2.45) rúdvégi terhek és az $M'_r = V_s$ és a $M'_s = -V_r$ egyensúlyi feltételek helyettesítése és egyszerű integrál átalakítások után a következő lesz:

$$\begin{aligned}\Pi_{Ge} &= \Pi_{Ge}(M^q) = \frac{1}{2} [M_y^q \alpha \gamma - M_z^q \alpha \beta]_0^L = \frac{1}{2} [M_r \alpha \gamma - M_s \alpha \beta]_0^L \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (M_r \alpha \gamma - M_s \alpha \beta)' dx = \frac{1}{2} \int_0^L (V_s \alpha \gamma + M_r (\alpha \gamma)' + V_r \alpha \beta - M_s (\alpha \beta)') dx.\end{aligned}$$

Ezt beírva a (2.33) első három tagjába,

$$\begin{aligned}\Pi_L + \Pi_{Gi} - \Pi_{Ge} &= \Pi_L \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L [M_w \alpha'^2 + M_1 (\beta' \gamma - \beta \gamma') + M_r (\alpha' \gamma + \alpha \gamma' - 2v' \alpha') - M_s (\alpha' \beta + \alpha \beta' + 2w' \alpha') \\ &+ V_r (2w' + \beta) \alpha - V_s (2v' - \gamma) \alpha + 2(V_s \beta - V_r \gamma) u'] dx - \frac{1}{2} \int_0^L (V_s \alpha \gamma + M_r (\alpha \gamma)' + V_r \alpha \beta - M_s (\alpha \beta)') dx,\end{aligned}$$

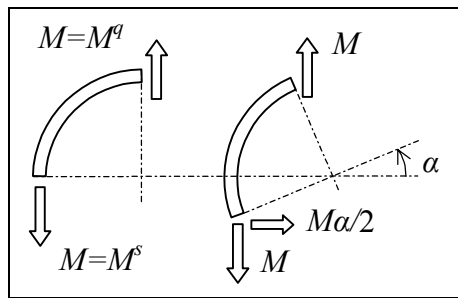
a lehetséges összevonások utáni eredmény

$$\begin{aligned}\Pi_L + \Pi_{Gi} - \Pi_{Ge} &= \Pi_L \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L [M_w \alpha'^2 + M_1 (\beta' \gamma - \beta \gamma') - 2M_r v' \alpha' - 2M_s w' \alpha' + 2V_r w' \alpha - 2V_s v' \alpha + 2(V_s \beta - V_r \gamma) u'] dx,\end{aligned}\quad (2.46)$$

ami megegyezik a (2.44) egyszerűsítések szerint átalakított (2.42) elvben a $\Pi_L + \Pi_{Gi}$ tagokkal.

Az eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy a (2.45) kiinduló feltételezésekkel összhangban, a (2.42) szerinti, klasszikus virtuális munka elvben a hajlító nyomatékok kvázitangens, a csavaró nyomaték pedig szemitangens tulajdonságúak. Ez az eltérő tulajdonság a klasszikus elv alkalmazási lehetőségeit erősen korlátozza, mivel a 2.6. ábra és az ehhez fűzött magyarázat szerint a forgás növekmények közben a kvázitangens és a szemitangens nyomatékok növekményei eltérőek lesznek. Térbeli szerkezeteknél, nem egytengelyű rúdelemek csatlakozásánál vagy görbe rudaknál, ahol a csavaró és hajlító igénybevételek nem függetlenek, egy terheletlen csomópontra a kezdeti nyomatéki egyensúlyi állapot a növekményekkel kiegészülve nem marad meg (2.9. ábra). Ezt a hatást *Argyris* [3], [4] mutatta ki és a csomóponti egyensúly hiba javításához egy „korrekciós” geometriai merevségi mátrix alkalmazását javasolta. A korrekciós mátrix származtatásának módszerét általános esetre *Teh* és *Clarke* [62] írták le. A véges forgások feltételével megszerkesztett (2.33) elv és az abból származtatott (2.35), (2.37) elvek alkalmazása esetén a korrekciós mátrixok alkalmazására nincs szükség és a néha kérdéses (2.41) feltételek alkalmazását is elkerültük.

Ebben a fejezetben bemutatott vizsgálatok eredményeit a következőkben foglalhatjuk össze: A (2.2) alakú, a forgás paraméterek másodfokú tagjait is tartalmazó elmozdulás vektorral megszerkesztett (2.33) virtuális munka elv minden további kiegészítés nélkül alkalmazható térbeli rúdszerkezetek vizsgálatára, mivel abban a belső erők nyomatékai szemitangens tulajdonságúak. Ha a kezdeti hajlító és csavaró igénybevételek függetlenek, – egyenes rudaknál, vagy sík keretek síkbeli terhelésénél és mozgásánál – a (2.37) és a (2.42) elvek azonos értékűek. Megmutattuk, hogy ez a két tétel, amit *Kim* és szerzőtársai [35] a (2.37) *Bernoulli-Vlasov* modellre igazoltak, az általános (2.33) *Timoshenko–Benscoter*, és minden további, ebből származtatott modellre is érvényes.



2.9. ábra. Nyomatéki egyensúly változása

2.5. A "VEM7" végelem modell

A virtuális munka elvének (2.33), (2.35) vagy (2.37) alakjaiból kiindulva, konkrét szerkezetekre vonatkozó megoldásokat lehet meghatározni. Egyik lehetőség a variációszámítás ismert módszerével a peremérték feladat (*Lagrange* egyenletek, természetes peremfeltételek) származtatása. Ez akkor hasznos, ha az adott modell egyszerű és így van lehetőség pontos, vagy közelítő, de zárt alakú megoldás előállítására, *MY Kim*, [36]. A másik lehetőség valamely direkt numerikus eljárás, célszerűen az általánosan használható végelem módszer alkalmazása.

A továbbiakban a virtuális munka elvének (2.37) *Bernoulli-Vlasov* formájából kiindulva, a lehető legegyszerűbb interpoláció alkalmazásával írjuk fel az elem mátrixokat. Vezessük be az alábbi definíció szerinti átlagos tengelyirányú elmozdulást:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_A U_x dA = u - \beta z_{CS} + \gamma y_{CS}, \quad u = \bar{u} + \beta z_{CS} - \gamma y_{CS} = \bar{u} - w' z_{CS} - v' y_{CS}. \quad (2.47)$$

Az elem csomóponti paraméterei (szabadságfokai) legyenek az S nyíróközéppont három elmozdulása, a három forgás és a hetedik szabadságfok a vetemedési paraméter:

$$\Delta_i^T = [\bar{u} \quad v \quad w \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \vartheta]_i \quad i=1,2, \quad \mathbf{U}_E = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}_{(14,1)}, \quad (2.48)$$

ahol \mathbf{U}_E az elem változók oszlop mátrixa.

A két csomópontú, tizennégy szabadságfokú elemen az átlagos axiális elmozdulást lineáris, a lehajlásokat és a csavaró forgást harmadfokú *Hermite* polinomokkal interpoláljuk.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi) &= \bar{u}_1(1-\xi) + \bar{u}_2\xi, \\ v(\xi) &= v_1F_1 + \gamma_1 L F_2 + v_2F_3 + \gamma_2 L F_4, \\ w(\xi) &= w_1F_1 - \beta_1 L F_2 + w_2F_3 - \beta_2 L F_4, \\ \alpha(\xi) &= \alpha_1F_1 + \vartheta_1 L F_2 + \alpha_2N_3 + \vartheta_2 L N_4, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$F_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad F_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \quad F_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad F_4 = \xi^3 - \xi^2, \quad \xi = \frac{x}{L}.$$

A hajlító és csavaró mozgások azonos szintű interpolációja akkor fontos és hasznos, ha a vizsgált feladatban ezek kapcsolódásával kell számolni. Az interpolációs függvényeket a (2.37) és a kezdeti terheléseket hatását leíró (2.38) kifejezésekbe helyettesítve, az elem \mathbf{k}_L lineáris merevségi, $\mathbf{k}_G = (\mathbf{k}_{Gi} + \mathbf{k}_{Ge})$ geometriai merevségi és (2.39) szerint a \mathbf{m} konzisztens tömeg mátrixai a következő módon számíthatók ki:

$$\delta \mathbf{U}_E^T \mathbf{k}_L \mathbf{U}_E = \delta \frac{1}{2} \int_0^L (EA \bar{u}^2 + EI_r w''^2 + EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ \alpha'^2) dx, \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}_E^T \mathbf{k}_{Gi} \mathbf{U}_E &= \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_2(v''\alpha - v'\alpha') + M_3(w''\alpha - w'\alpha') \right. \\ &\quad + M_1(v''w' - v'w'') + M_w \alpha'^2 + V_r w'\alpha - V_s v'\alpha \\ &\quad \left. + 2(V_r v' + V_s w')(w''z_{CS} + v''y_{CS}) - 2(V_r v' + V_s w')\bar{u}' \right] dx, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}_E^T \mathbf{k}_{Ge} \mathbf{U}_E &= \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[f_x(z_{SP}v' - y_{SP}w')\alpha - (f_y z_{SP} + f_z y_{SP})w'v' - (f_y y_{SP} + f_z z_{SP})\alpha^2 \right. \\ &\quad \left. - f_y y_{SP}v'^2 - f_z z_{SP}w'^2 \right] dx \\ &+ \delta \frac{1}{2} \left[F_x(z_{SP}\gamma + y_{SP}\beta)\alpha + (F_y z_{SP} + F_z y_{SP})\beta\gamma - (F_y y_{SP} + F_z z_{SP})\alpha^2 - F_z z_{SP}\beta^2 - F_y y_{SP}\gamma^2 \right. \\ &\quad + M_x^q \left((\beta^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_x}{2} - \beta\gamma \cos 2\Theta_x \right) - M_y^q \left((\alpha^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_y}{2} - \alpha\gamma \cos 2\Theta_y \right) \\ &\quad \left. + M_z^q \left((\alpha^2 - \beta^2) \frac{\sin 2\Theta_z}{2} - \alpha\beta \cos 2\Theta_z \right) \right]_j, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\delta U_E^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{U}}_E = \int_0^L \left[\rho A \left(\ddot{u} \delta \bar{u} + (\ddot{v} + \ddot{\alpha} z_{CS}) \delta v + (\ddot{w} - \ddot{\alpha} y_{CS}) \delta w + (\ddot{v} z_{CS} - \ddot{w} y_{CS} + \ddot{\alpha} i_p^2) \delta \alpha \right) + \rho (I_s \ddot{v}' \delta v' + I_r \ddot{w}' \delta w' + I_\omega \ddot{\alpha}' \delta \alpha') \right] dx. \quad (2.54)$$

A (2.50) alakú egyszerű interpoláció nagy előnye, hogy az elem mátrixok zárt alakban kiintegrálhatóak, ami a numerikus számítások lehetséges hibaforrásait csökkenti. A harmadfokú elem megbízhatóságát, pontosságát *Teh* [63], [64] vizsgálatai is igazolják.

A (2.51) - (2.54) zárt alakban kiintegrált elem mátrixokat az [S9], [S10], [S13], közlemények, illetve a teljesség kedvéért az F2. függelék is részletesen bemutatja. A (2.51), vagy (F2.1) \mathbf{k}_L lineáris merevségi mátrix, ami az itt bemutatott és a klasszikus modellben azonos, megtalálható többek között *Attard* [5], *Barsoum, Gallagher* [7], *Iványi, Papp* [30], *Kim* [34], *Kitipornchai* [42] publikációiban is. A \mathbf{k}_{Gi} geometriai merevségi mátrixnak a direkt nyírást és az axiális mozgást is tartalmazó (2.52), vagy (F2.2a), valamint az \mathbf{m} konzisztens tömegmátrix (2.54), (F2.4) formáját ismertető közleményt a szakirodalomban nem találtam. Az (F2.5), a forgásokra nézve is energetikailag konzisztens, diagonál tömegmátrix, amit *Archer* [2] eljárását követve, a merev testek mozgását leíró, elemi dinamikai összefüggések alapján lehet megszerkeszteni. Ennek részleteit és pontossági vizsgálatát az [S4] publikáció és az [S7] dolgozat közli.

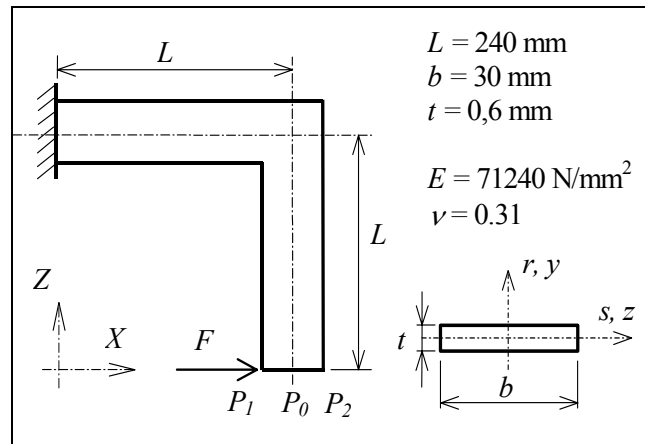
3. PÉLDÁK A RUDEMODELL ALKALMAZÁSÁRA

Az előzőekben részletezett elmélet és a VEM7 végelem modell ellenőrzéséhez használt feladatok közül itt csak hármat ismertetünk. A numerikus ellenőrzéshez ajánlott feladatsort ismertet *Teh* [63], [64]. Ezekre – és még további feladatokra – vonatkozó numerikus vizsgálati eredmény a [S3], [S4], [S5], és [S7] publikációkban is található.

A következőkben bemutatandó feladatok célja, a szükséges és kötelező numerikus ellenőrzéseken túl, a rúd és a csomópontonként hét szabadságfokú rúd végelem modell széleskörű, helyenként a szokásos gépészeti, mérnöki alkalmazások keretein túlmutató lehetőségeinek rövid bemutatása. Ezek alapján is megállapítható, hogy a modell a célkitűzésekben megfogalmazott jelenségek vizsgálatára alkalmas.

3.1. Keret kritikus terhelése

A 3.1. ábrán látható téglalap keresztmetszetű, nyitott síkbeli keret az F erő hatására elveszti stabilitását, a síkjára merőlegesen kihajlik és elfordul. A kritikus terhelés értéke függ az erő keresztmetszeten belüli excentricitásától is és irányától is.



3.1. ábra. Keret terhelése és méretei

A feladattal kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy *Argyris* [3] a nyitott keret vizsgálatával mutatta ki a 2.4. fejezetben ismertetett klasszikus modellben a hajlító és csavaró nyomatékok forgás növekmények közötti eltérő viselkedését. A következő számítás eredményei is igazolják, hogy a klasszikus modell nem alkalmas térbeli szerkezetek vizsgálatára.

A kritikus terhelés számítását három különböző kezdeti terhelési esetre végeztük el, az F erő támadáspontja a P_1 ($z_{SP} = -b/2$), a P_0 ($z_{SP} = 0$) és a P_2 pont ($z_{SP} = +b/2$). A kritikus erők számított és referencia értékeit a 3.1. táblázatban foglaltuk össze. A pozitív eredmények a 3.1.

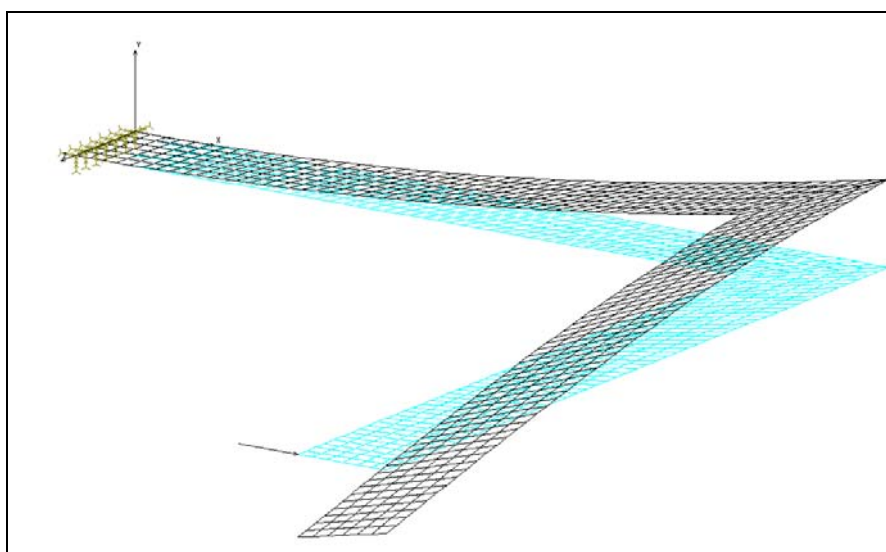
ábra szerinti, a negatív az azzal ellenkező erő irányt jelentik. A táblázat első két sora a VEM7 végelem modellel az (1.2) alakú sajátérték feladat legkisebb pozitív és negatív sajátértékeiből, két különböző ($N_e = 4$ és 20) elemszámmal meghatározott eredményeket mutatja. Látszik, hogy egyenes szakaszonként már két elem is elfogadható eredményt ad. Az első két sor eredményeinek maximális eltérése kisebb mint 2%, ami a (2.50) alakú harmadfokú interpoláció minőségét igazolja. A 3.1. táblázat 3. és 4. soraiban a szakirodalomban megtalálható eredmények közüladtunk meg kettőt. Az 5. és 6. sorokban a héjelemekből álló végelem modellek eredményeitadtuk meg. A 6. sor szerinti COSMOS/M modellt és az egyik kihajlott alakot mutatja a 3.2. ábra. Végül, a táblázatban a 7. és 8. sorok a 2.4.1. fejezetben, a klasszikus modell alkalmazhatóságának korlátira tett megállapításokat illusztrálják, mivel ezek az eredmények közel fele akkorák, mint a pontos értékek.

		1: F a P_1 pontban	2: F a P_0 pontban	3: F a P_2 pontban
1.	$N_e = 4$	1,033 / -0,7219	1,091 / -0,6948	1,145 / -0,6668
2.	$N_e = 20$	1,031 / -0,7100	1,088 / -0,6830	1,141 / -0,6551
3.	<i>Ref</i> [27]		1,088 / -0,6804	
4.	<i>Ref</i> [40]	1,031 / -0,7002	1,088 / -0,6830	1,141 / -0,6551
5.	<i>Ref</i> [40] ^{a1}	1,122 / -0,7311	1,183 / -0,7021	1,2401 / -0,6725
6.	^{a2}	1,129 / -0,7223	1,184 / -0,6957	1,233 / -0,6681
7.	$N_e = 20^b$	0,5399 / -0,4330	0,5537 / -0,4238	0,5669 / -0,4143
8.	<i>Ref</i> [40] ^b		0,5568 / -0,4263	

^{a1} ABACUS, 250 Q9 shell (S9R5) elem, ^{a2} COSMOS/M, 600 shell (SHELL4T) elem,

^b klasszikus modell, (2.43), $U^* = 0$

3.1. táblázat. Keret kritikus terhelései (N)



3.2. ábra. COSMOS/M modell, $F_{cr} = 1,129$ N.

Ezzel a feladattal bemutattuk, hogy a kidolgozott VEM7 végeelem modell térbeli rúdszerkezetek kritikus terheléseinek, valamint excentrikus kezdeti terheléseinek kezelésére alkalmas.

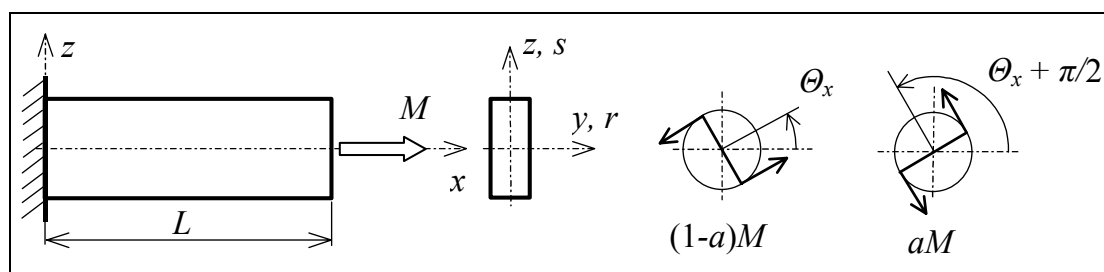
3.2. Csavart tengely stabilitása

A gépészeti gyakorlatban gyakran előfordul, hogy egy hosszú rudat, vagy tengelyt csavaró és esetleg ezzel együtt más igénybevételek is terhelik. Ez esetenként szükségessé teszi a csavart rudak stabilitási kérdéseinek elemzését. A szakirodalomból már régóta ismertek az erre vonatkozó eredmények. (*Goto* [25], *Ponomarjov* [53], *Ziegler* [73]) A következő egyszerű feladat célja annak igazolása, hogy a dolgozatban bemutatott rúdmodell a csavart rudak lineáris stabilitási problémájának vizsgálatára is alkalmas. Az erre épülő végelem modell a kiegészítő lehetőségekkel együtt felhasználható bonyolultabb, a valóságos üzemi viszonyokat is – változó keresztmetszet, rugalmas támaszok, időben változó kombinált terhelések – modellező feladatok vizsgálatára.

A 3.3. ábrán látható, szimmetrikus keresztmetszetű tengely igénybevétele tiszta csavarás. Legyen a konzol szabad végén működő M kezdeti csavaró erőpár két, egymásra merőleges irányú kvázitangens nyomatékú erőpár eredője:

$$M_1^q = (1-a)M, \quad M_2^q = aM. \quad (3.1)$$

Az a paraméter értékével beállíthatjuk az eredő nyomaték kvázitangens vagy szemitangens tulajdonságát, ugyanis a 2.5 és 2.6 ábrákhoz tartozó megjegyzésekkel összhangban, ha $a = 0$ vagy 1 akkor $M = M^q$ vagy ha $a = 0,5$ akkor $M = M^s$. (Itt érdemes megemlíteni, hogy *Yau* [71] ezt a felbontást alkalmazta az I szelvényű csavart rudak stabilitásvizsgálatához, amikor feltételezte, hogy az eredő csavaró igénybevétel szabad – *St'Venant* féle – csavarási része szemitangens, a gátolt csavarási rész pedig kvázitangens természetű.)



3.3. ábra Konzol terhelése

A (2.37) virtuális munka elvének az adott feladatra érvényes alakja, mivel a keresztmetszet szimmetrikus, $y_{CS} = z_{CS} = 0$ és $M_1 = M$:

$$\delta \int_0^L \frac{1}{2} (EAu'^2 + EI_r w'' + EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ\alpha'^2) dx + \delta \int_0^L \frac{1}{2} M (v''w' - v'w'') dx - \delta \Pi_{Ge} = 0 \quad (3.2)$$

A tengely $x = L$ végén a két merőleges és kvázitangens nyomatékú kezdeti terhelő erőpár eredő munkája a forgás növekményeken a (2.31) vagy (2.38) alapján:

$$\Pi_{Ge} = \frac{1}{2} M (1 - 2a) \left[(w'^2 - v'^2) \frac{\sin 2\Theta_x}{2} + v'w' \cos 2\Theta_x \right]_{x=L} \quad (3.3)$$

Itt is látszik hogy ha $a = 0,5$ akkor $M = M^s$ és $\Pi_{Ge} = 0$, ami megfelel a (2.32) általános érvényű megállapításnak. Mivel a (3.2) elvben a kezdeti M csavaró terhelés csak a v és w mozgásokkal kapcsolódik, a továbbiakban csak ezekre a változókra vonatkozó megoldást elemezzük. Képezve a (3.2) v és w szerinti variációit, egyszerű integrál átalakítások után a következő peremérték feladathoz jutunk:

$$EI_s v''' + Mw'' = 0, \quad EI_r w''' - Mv'' = 0, \quad (3.4a)$$

$$x = 0: \quad v = 0, \quad w = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0,$$

$$x = L: \quad EI_s v'' + \frac{1}{2} Mw' - \frac{1}{2} M (1 - 2a) (v' \sin 2\Theta_x - w' \cos 2\Theta_x) = 0, \quad (3.4b)$$

$$EI_r w'' - \frac{1}{2} Mv' + \frac{1}{2} M (1 - 2a) (v' \cos 2\Theta_x + w' \sin 2\Theta_x) = 0.$$

Érdemes megfigyelni, hogy az a paraméter csak a peremfeltételben jelenik meg, az egyenletekben nem. A terhelés megosztása nem befolyásolja a belső egyensúlyt, mivel a belső erők nyomatékai – esetünkben az a értékétől függetlenül – mindig szemitangens természetűek. Ez megfelel a 2.4.1. fejezetben részletezett általános érvényű vizsgálat eredményeinek. A (3.4a) egyenlet megoldása, ami teljesíti az $x = 0$ peremre vonatkozó kinematikai peremfeltételeket:

$$\begin{aligned} v(x) &= c_1 (\sin \psi x / L - \psi x / L) - c_2 (1 - \cos \psi x / L), \\ w(x) &= c_1 k (1 - \cos \psi x / L) + c_2 k (\sin kx - \psi x / L), \quad \psi = \frac{ML}{E\sqrt{I_r I_s}}, \quad k = \sqrt{\frac{I_s}{I_r}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ezt a megoldást az $x = L$ végpontra vonatkozó (3.4b) dinamikai peremfeltételekbe helyettesítve, a következő lineáris, homogén egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} &\left\{ (1 - 2a) \begin{bmatrix} -\sin 2\Theta_x (\cos \psi - 1) / k + \cos 2\Theta_x \sin \psi & \cos 2\Theta_x (\cos \psi - 1) + \sin 2\Theta_x \sin \psi / k \\ \cos 2\Theta_x (\cos \psi - 1) + k \sin 2\Theta_x \sin \psi & k \sin 2\Theta_x (\cos \psi - 1) - \cos 2\Theta_x \sin \psi \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} -\sin \psi & -(\cos \psi + 1) \\ (\cos \psi + 1) & -\sin \psi \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Az együttható mátrix determinánsának zérus feltételéből felírható a karakterisztikus egyenlet. Ha $a = 0,5$ akkor a $\cos\psi + 1 = 0$ egyenlet megoldásából a kritikus szemitangens nyomaték:

$$M_{cr}^s = \pi \frac{E}{L} \sqrt{I_r I_s}, \quad (3.7)$$

és ha $a = 0$ vagy $a = 1$ és $\Theta_x = 0$ vagy $\Theta_x = \pi/2$, (bármely értékpárra ugyanazt az eredményt kapjuk) akkor a karakterisztikus egyenlet $\cos\psi = 0$ alakú lesz, és a kvázitangens kritikus nyomaték:

$$M_{cr}^q = \frac{\pi}{2} \frac{E}{L} \sqrt{I_r I_s}. \quad (3.8)$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk bármely Θ_x értékre, ha $k = 1$, azaz ha $I_r = I_s$. Ezek a régóta ismert egyszerű eredmények megtalálhatóak például *Ponomarjov* [53] könyvének 143. oldalán.

A VEM7 végeelem modell ellenőrzésére megvizsgáltuk azt az esetet, amikor a tengely végén csak egy kvázitangens nyomaték van, $a = 0$, de annak Θ_x iránya változik. A 3.3 ábra szerinti konzol adatai legyenek: $L = 1000$ mm, $A = 100$ mm², $I_r = 4500$ mm⁴, $I_s = 500$ mm⁴, $J = 1000$ mm⁴, $E = 2,0 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$. Ezekkel az adatokkal $k = 1/3$, és a ψ (3.5) definíciójának átrendezésével a kritikus nyomaték

$$M_{cr}^q = \psi(\Theta_x) \frac{E}{L} \sqrt{I_r I_s} = 3,0 \psi(\Theta_x) 10^5 \text{ Nmm}.$$

A 3.2. táblázat a különböző N_e elemszámmal kiszámolt ψ értékeket tartalmazza. Látszik, hogy már az $N_e = 2$ felosztással is igen pontos eredményeket kaptunk.

A VEM7 modellel kiszámított eredmények alapján megrajzolt $\psi(\Theta_x)$ függvényt a 3.4. ábra mutatja, ahol látszik, hogy a kritikus nyomaték legkisebb értéke a $\Theta_x = 45^\circ$ irányú terhelő erőpár álláshoz tartozik. Ehhez a terheléshez tartozó kritikus kvázitangens nyomatéki tényező ψ_{min} értékét úgy is meghatározhatjuk, ha a (3.6) egyenletrendszer együttható mátrixában a $\Theta_x = 45^\circ$ és az $a = 0$ értékeket helyettesítjük, amiből átalakítások után a

$$\operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{2k}{1-k^2}, \quad |k| \leq 1 \quad (3.9)$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk. Ha $k = 1$, akkor $\psi_{min} = \pm\pi/2$, megegyezik a (3.8) eredménnyel.

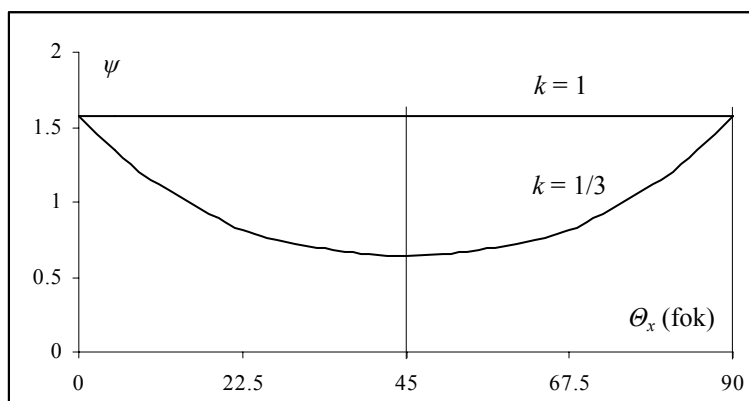
Ez a feladat jól szemlélteti a különböző természetű külső terhelő erőpárok kezelésének lehetőségét és fontosságát. Egy szerkezeten belül a kapcsolódó elemekről átadódó csomóponti nyomatéki terhelés – a 2.4.1. fejezetben elvégzett vizsgálat eredményei szerint – azonban mindig szemitangens természetű.

A gépészeti alkalmazások szempontjából különösen fontos lehet az összetett igénybevételű, például a nyomott és csavart tengelyek, fűrészszármok stabilitásvizsgálata. A most bemutatott rövid ellenőrző feladat igazolja, hogy a nagy forgások elméletét alkalmazó rúd és a VEM7 végelem modell ilyen típusú vizsgálatok végzésére is alkalmas lehet.

Θ_x (fok)	$N_e = 2$	$N_e = 4$	Ref.
0	1,5716	1,5708	^a $\pi/2 = 1,5708$
10	1,1431	1,1430	
22,5	0,81486	0,81483	
30	0,71374	0,71373	
45	0,64351	0,64350	^b $\arctan 0,75 = 0,64350$

^a (3.8) egyenlet, ^b (3.9) egyenlet

3.2. táblázat. A ψ nyomatéki tényező értékei, konvergencia teszt, $k = 1/3$.



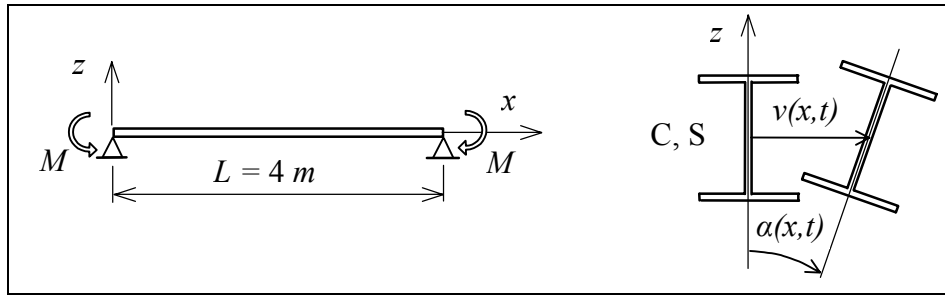
3.4. ábra. A kvázitangens kritikus nyomaték változása

3.3. Hajlított tengely szabad rezgései

A rugalmas szerkezetekre ható állandó (időben állandó) terhelések megváltoztatják a szerkezet dinamikai jellemzőit. Közismert a nyomott egyenes rúdra érvényes megoldás, ami szerint a hajlító lengés frekvenciájának négyzete és a nyomó/húzó terhelés között lineáris a kapcsolat. Ha a nyomóerő közelít a *Euler* féle kritikus értékhez, a legkisebb frekvencia a zérushoz tart. Ez azonban túl egyszerű feladat, abban az értelemben, hogy a nyomó igénybevétel változásával a lengéskép nem változik, mivel az első hajlító lengéskép és a kihajlott alak (a két sajátvektor) azonos. Ettől eltérő esetekben az állandó kezdeti terhelés a sajátfrekvenciákkal együtt a lengésképeket is módosítja. A lengésképek pontatlansága azokban a dinamikai számításokban, melyek a modálanalízis módszerét alkalmazzák, (pl. szeizmikus vizsgálatok) jelentős hibát eredményezhet a szerkezeti válaszokban, mint például

a maximális igénybevétel nagysága és helye. Ez a jelenség esetenként szükségessé teheti az (1.3) alakú másodrendű dinamikai (a megjelölés a másodrendű statikai számítás elnevezés analógiája) számítások elvégzését.

Először vizsgáljuk meg, hogy a rúd tengelyére merőleges, hajlító igénybevételt okozó állandó terhelések hogyan módosítják a rúd dinamikai viselkedését. Ebben a körben a legegyszerűbb alapfeladat a 3.5. ábra szerinti, állandó és szimmetrikus keresztmetszetű kéttámaszú tartó szabad rezgéseinek vizsgálata.



3.5. ábra. Kéttámaszú tartó.

A virtuális munka elvének alakja a (2.37), (2.38) és (2.39) felhasználásával, mivel most a keresztmetszet szimmetrikus, $y_{CS} = z_{CS} = 0$, a kezdeti igénybevétel az $M_2 = M_r = M$ egyenes, tiszta hajlítás és a kezdeti terhelés a két rúdvégi kvázitangens erőpár:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \delta \int_0^L \frac{1}{2} (EA u'^2 + EI_r w''^2 + EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ \alpha'^2) dx + \delta \int_0^L \frac{1}{2} M (v'' \alpha - v' \alpha') dx \\ & + \int_0^L \rho \left[A (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) + I_p \ddot{\alpha} \delta \alpha + I_s \ddot{v}' \delta v' + I_r \ddot{w}' \delta w' + I_\omega \ddot{\alpha}' \delta \alpha' \right] dx \\ & - \frac{1}{2} M \delta [\alpha v']_0^L = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Látható, hogy a kezdeti hajlító igénybevétel csak a $v(x, t)$ oldalirányú mozgást és az $\alpha(x, t)$ csavaró forgást kapcsolja össze, a longitudinális és a z irányú hajlító lengések függetlenek maradnak. Elhagyva a harmadik vegyes deriváltakat, – a forgásból és a vetemedési mozgásból származó tehetetlenségi erők hatását – képezzük a (3.10) virtuális munka elv v és α szerinti variációit. A szokásos integrál átalakítások után a következő peremérték feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned} EI_s v'''' + M \alpha'' + \rho A \ddot{v} &= 0, \\ EI_\omega \alpha'''' - GJ \alpha'' + M v'' + \rho I_p \ddot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} [(EI_s v'' - M \alpha') \delta v]_0^L &= 0, \quad [(EI_s v'') \delta v']_0^L = 0, \\ [(-EI_\omega \alpha''' + GJ \alpha' - M v') \delta \alpha]_0^L &= 0, \quad [(EI_\omega \alpha'') \delta \alpha']_0^L = 0. \end{aligned} \quad (3.12a)$$

Ha a rúd két végén a csuklós megtámasztás a keresztmetszet csavarási vetemedését nem akadályozza, a peremfeltételeket a következők lesznek:

$$x = 0, x = L: \quad v = 0, \quad \alpha = 0, \quad v'' = 0, \quad \alpha'' = 0. \quad (3.12b)$$

Ezeket a peremfeltételeket teljesítő megoldás

$$v(x, t) = v_0 \sin\left(i \frac{\pi}{L} x\right) \sin \omega t, \quad \alpha(x, t) = \alpha_0 \sin\left(i \frac{\pi}{L} x\right) \sin \omega t, \quad (3.13)$$

alakban írható fel, amit a (3.11) egyenletbe helyettesítve a v_0, α_0 maximális kitérésekre a következő homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \left(EI_s \left(i \frac{\pi}{L} \right)^4 - \rho A \omega^2 \right) & -M \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 \\ -M \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 & \left(EI_\omega \left(i \frac{\pi}{L} \right)^4 + GJ \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 - \rho I_p \omega^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Ebből, ha nincs hajlító igénybevétel, azaz $M = 0$, a nem kapcsolt hajlító és csavaró lengések sajátfrekvenciáira a jól ismert összefüggéseket kapjuk:

$$\omega_{bi}^2 = \left(i \frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{EI_s}{\rho A}, \quad \omega_{ti}^2 = \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{GJ}{\rho I_p} \left[1 + \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI_\omega}{GJ} \right], \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

(Ludvig [45], 501. oldal) Másrésről, statikai feladatra, ha $\omega = 0$, a következő nyomaték sajátértékek adódnak:

$$M_i^2 = \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 EGI_s J \left(1 + \left(i \frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI_\omega}{GJ} \right), \quad i = 1, 2, \dots,$$

és a legkisebb, $i = 1$ sajátérték a kifordulást okozó kritikus nyomaték, (Iványi [31], 237. oldal):

$$M_{cr} = M_1 = \pm \frac{\pi}{L} \sqrt{EGI_s J} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2 GJ}} = \pm \frac{L^2}{\pi^2} \rho \sqrt{AI_p} \omega_{b1} \omega_{t1}. \quad (3.16)$$

A továbbiakban csak az $i=1$ megoldást vizsgáljuk. Vezessük be a

$$\mu_1 = M / M_1 \quad (3.17)$$

nyomaték terhelési tényezőt. Ezzel, és a (3.15) frekvenciákkal a (3.14) lineáris egyenletrendszer átalakítható:

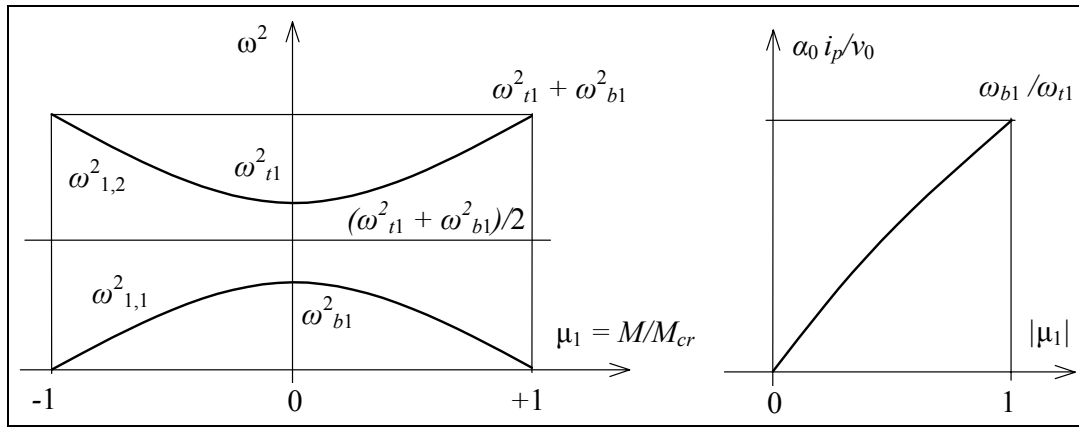
$$\begin{bmatrix} A(\omega_{b1}^2 - \omega^2) & -\sqrt{AI_p} \mu_1 \omega_{b1} \omega_{t1} \\ -\sqrt{AI_p} \mu_1 \omega_{b1} \omega_{t1} & I_p (\omega_{t1}^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Az együttható mátrix determinánsának zérus feltételéből felírható a karakterisztikus egyenlet, aminek megoldása – ha $\omega_{b1} < \omega_{t1}$ – az első két kapcsolt sajátfrekvencia:

$$\omega_{1,1}^2 = \frac{\omega_{t1}^2 + \omega_{b1}^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_{t1}^2 - \omega_{b1}^2}{2}\right)^2 + \mu_1^2 \omega_{t1}^2 \omega_{b1}^2} , \quad (3.19a)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{t1}^2 + \omega_{b1}^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{t1}^2 - \omega_{b1}^2}{2}\right)^2 + \mu_1^2 \omega_{t1}^2 \omega_{b1}^2} . \quad (3.19b)$$

A kapcsolt hajlító - csavaró frekvencia és a hajlító terhelés kapcsolatát mutatja a 3.6 ábra bal oldali része. Érdekes megfigyelni, hogy a terhelés növelésével az első frekvencia csökken, a második viszont növekszik.



3.6. ábra. A kapcsolt hajlító-csavaró frekvenciák és az első lengéskép változása

A legkisebb sajátfrekvencia ismeretében a (3.18) első egyenletből felírhatjuk a megfelelő lengésképben a hajlító és a csavaró komponensek "keveredési arányát":

$$\frac{\alpha_0 i_p}{\nu_0} = \frac{\omega_{b1}^2 - \omega_{1,1}^2}{\mu_1 \omega_{b1} \omega_{t1}} , \quad (3.20)$$

ahol $i_p = (I_p/A)^{1/2}$, a poláris inercia sugár. A keveredési arány és a terhelő nyomaték kapcsolatát mutatja a 3.6 ábra jobb oldali része. Látszik, hogy a kezdetben tiszta hajlító lengésképben ($\alpha_0 = 0$) a nyomaték növekedésével a frekvencia változásnál gyorsabban növekszik a csavaró rész aránya. Határesetben, ha $M = M_{cr}$ és $\mu_1 = 1$, az arány értéke

$$\frac{\alpha_0 i_p}{\nu_0} = \frac{\omega_{b1}}{\omega_{t1}} . \quad (3.21)$$

Hasonló jellegű eredmények vezethetők le az $i > 1$ indexű megoldás párokra.

A VEM7 modell ellenőrzésére hasonlítsuk össze a 3.5. ábra szerinti, $L = 4$ m hosszú, kéttámaszú tartóra a zárt alakú és a végeelem megoldásokat. A keresztmetszeti és

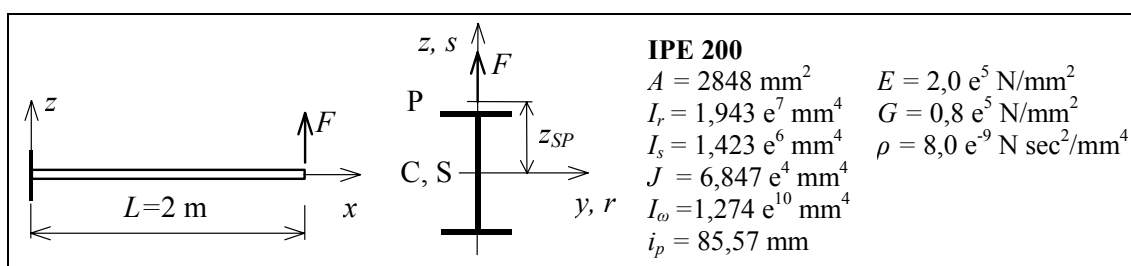
anyagjellemzőket a 3.7 ábra mutatja. Az első nem kapcsolt hajlító és csavaró frekvenciák (3.15) értékei $\omega_{b1} = 69,00 \text{ sec}^{-1}$ és $\omega_{t1} = 161,4 \text{ sec}^{-1}$, a kritikus hajlító nyomaték pedig a (3.16) szerint $M_1 = M_{cr} = \pm 35,18 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$. A 3.3. táblázatban összegyűjtött eredmények alapján megállapítható, hogy a 10 elemmel elvégzett végeselem számítások eredményei gyakorlatilag megegyeznek az elméleti összefüggések szerinti értékekkel.

M (10^6 Nmm)	μ_1	VEM7			(3.19a)	(3.19b)	(3.20)
		$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\alpha_0 i_p / v_0$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\alpha_0 i_p / v_0$
0	0	68,93	161,4	0	69,00	161,4	0
10	0,284	65,51	162,8	0,145	65,58	162,8	0,146
20	0,569	54,91	166,7	0,274	54,93	166,7	0,275
35	0,995	6,39	175,4	0,425	6,34	175,4	0,426

3.3. táblázat Kapcsolt frekvenciák (1/sec) és lengésképek összehasonlítása ($N_e = 10$)

Érdemes az előzőekben levezetett három érdekes részeredményt kiemelni:

- A (3.14) egyenletrendszer szerint csak az azonos i indexű (félhullám számú) hajlító és csavaró lengések kapcsolódnak.
- A (3.16) szerint a kritikus hajlító nyomaték arányos a terheletlen szerkezet hajlító és csavaró frekvenciáinak szorzatával.
- A (3.21) szerint a kritikus hajlító nyomatékkal terhelt egyenes rúd térbeli kihajlott alakjában a kihajlás és az elcsavarodás aránya megegyezik a terheletlen rúd hajlító és csavaró frekvenciáinak arányával.



3.7. ábra. Konzol excentrikus terheléssel

Ha a hajlító igénybevétel nem állandó, egyszerű, pontos megoldásokat nem lehet felírni. Ilyen feladat például a 3.7. ábrán látható konzolra vonatkozó vizsgálat elvégzése. A szimmetrikus keresztmetszet középpontjának és a terhelő erő P támadáspontjának távolsága z_{SP} , a teher excentricitása. A két zérustól különböző kezdeti igénybevétel az $M_2 = M_r$ egyenes hajlítás és a $V_s = F$ állandó nyírás.

Mivel most is csak az y irányú hajlító és csavaró mozgások lesznek kapcsolatosak, a (2.37) virtuális munka elvének csak a $v(x,t)$ és $\alpha(x,t)$ növekményekre vonatkozó részét írjuk fel.

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \delta \int_0^L \frac{1}{2} (EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ \alpha'^2) dx + \delta \int_0^L \frac{1}{2} [M_r (\beta_r \alpha^2 + v'' \alpha - v' \alpha') - V_s v' \alpha] dx \\ & + \int_0^L \rho [A \ddot{v} \delta v + I_p \ddot{\alpha} \delta \alpha + I_s \dot{v}' \delta v' + I_\omega \ddot{\alpha}' \delta \alpha'] dx + \frac{1}{2} \delta [Fz_{SP} \alpha^2]_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Képezzük a (3.22) v és α szerinti variációit, alkalmazzuk a szokásos integrál átalakításokat, majd helyettesítsük a $dM_r/dx = V_s$ egyensúlyi egyenletet (a sorrend fontos) és az $M_r(L) = 0$ feltételt, az eredmény a következő mozgásegyenlet és peremfeltétel lesz:

$$\begin{aligned} EI_s v'''' + (M_r \alpha)'' + \rho A \ddot{v} - \rho I_s \ddot{v}'' &= 0 \\ EI_\omega \alpha'''' - GJ \alpha'' - \beta_r (M_r \alpha')' + M_r v'' + \rho I_p \ddot{\alpha} - \rho I_\omega \ddot{\alpha}'' &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} x=0 : \quad v &= 0, \quad \alpha = 0, \quad v' = 0, \quad \alpha' = 0, \\ x=L : \quad v'' &= 0, \quad -EI_s v'''' + \rho I_s \ddot{v}'' = 0, \\ \alpha'' &= 0, \quad -EI_\omega \alpha'''' + GJ \alpha'' + \rho I_\omega \ddot{\alpha}'' + Fz_{SP} \alpha = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Mivel az M_r nem állandó, ez egy változó együtthatójú, negyedrendű parciális differenciál egyenlet rendszer, ami zárt alakban nem oldható meg. A 3.7 ábra szerinti IPE200 keresztmetszetű konzolra a numerikus megoldásokat a VEM7 végeelem modell felhasználásával számítottuk ki. A 3.4 táblázat az első két, nem kapcsolt frekvencia és az N_e elemszám kapcsolatát mutatja.

N_e	ω_{1b} (1/sec)	ω_{1t} (1/sec)	F_{cr} (kN)
2	98,26	150,16	$\pm 46,46$
4	98,22	150,10	$\pm 46,15$
8	98,21	150,10	$\pm 46,13$
10	98,21	150,10	$\pm 46,13$

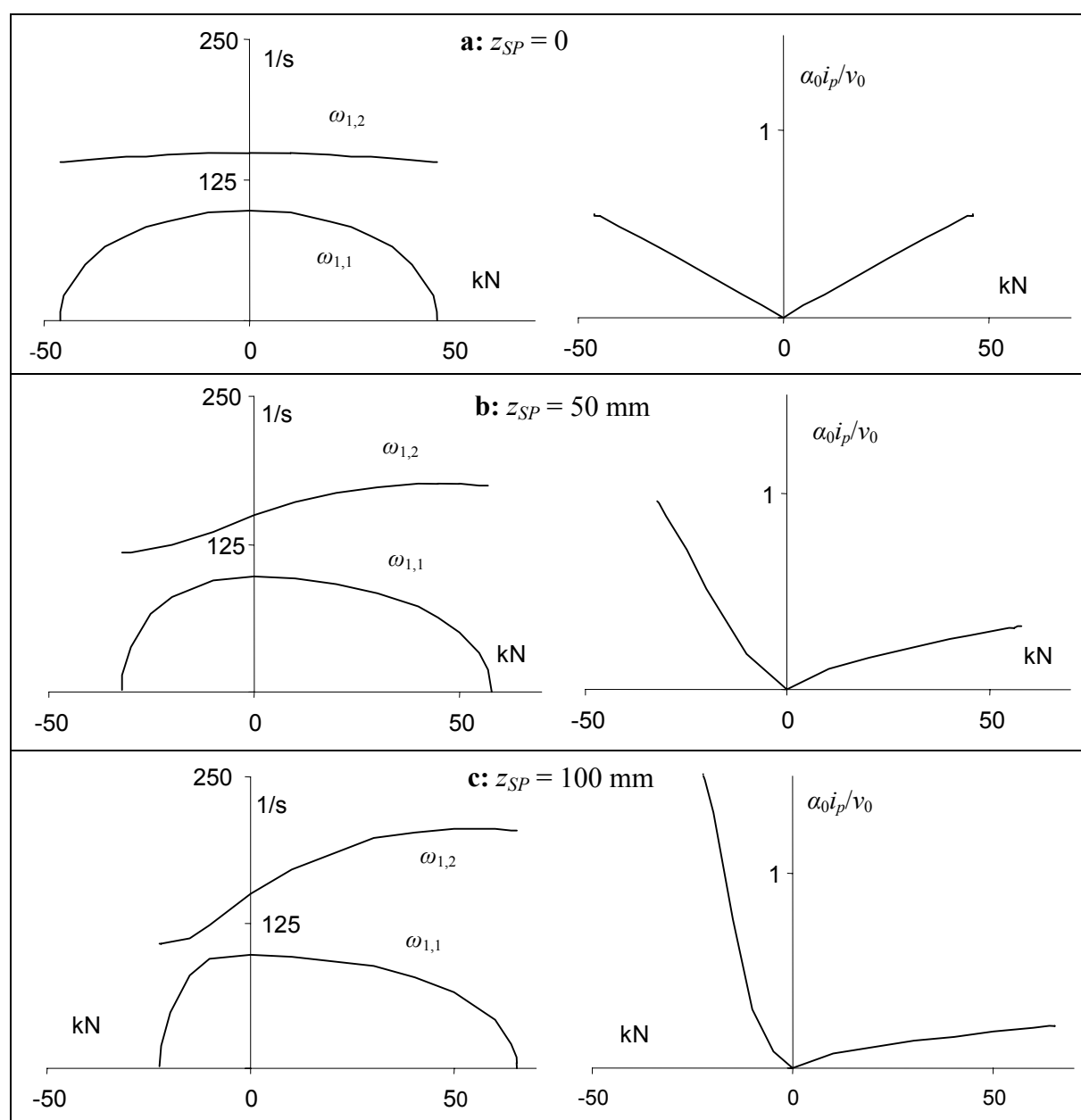
3.4. táblázat. Pontosság vizsgálat, $z_{SP} = 0$.

a: $z_{SP} = 0$ mm, $F_{cr} = \pm 46,13$ kN				b: $z_{SP} = 100$ mm, $F_{cr} = -22,38 / +65,26$ kN			
F (kN)	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\alpha_0 i_p / v_0$	F (kN)	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\alpha_0 i_p / v_0$
0	98,21	150,1	0	-22	19,70	107,4	1,311
± 20	89,39	148,0	0,250	-10	93,89	122,7	0,298
± 30	76,07	145,8	0,373	0	98,21	150,1	0
± 46	7,71	142,0	0,546	+65	9,30	204,9	0,215

3.5. Táblázat. Frekvencia (1/sec) és lengéskép változása

A 3.5 táblázat az első két kapcsolt frekvencia, a lengéskép és a kezdeti teher nagysága, iránya és excentricitása közötti kapcsolatot mutatja, ahol most α_0 és v_0 a konzol szabad végének mozgásjellemzői. A 8a-c. ábrák alapján megállapítható, hogy a teher excentricitása még szimmetrikus keresztmetszet esetén is jelentősen módosítja a sajátfrekvenciák változásának a jellegét. Nagyobb mértékű a lengésképek változása. A 3.5.b táblázatba az IPE szelvény felső részén ($z_{SP} = 100$ mm) lefelé ható $F = -10$ kN $\approx F_{cr}/2$ erő hatására az első két sajátfrekvencia értékének csökkenése a terheletlen ($F = 0$) értékekhez képest 4% és 20%, ugyanakkor az első, eredetileg tisztán hajlító lengésképben az erő támadáspont oldalirányú mozgásának több mint 30% származik a csavaró mozgásból.

További eredményeket találhatók az [S13] publikációban.



8. ábra. Frekvencia, lengéskép és a teher excentricitás kapcsolata

4. MEREVÍTŐ ELEM KAPCSOLÁSA

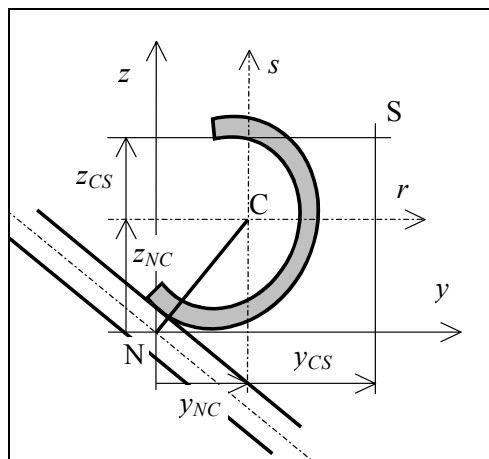
Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy a csomópontonként hét szabadságfokú VEM7 rúdelemet hogyan lehet más, csomópontonként hat szabadságfokú elemekkel összekapcsolni úgy, hogy a 3. fejezetben bemutatott kedvező tulajdonságok a kapcsolás után is megmaradjanak. Az elsődleges alkalmazási terület a merevített lemez és héjszerkezetek pontosabb mechanikai vizsgálata, illetve az 1.2. fejezetben megfogalmazott célkitűzéseknek megfelelően a merevítő rúdelem torziós mozgásainak pontosabb modellezése.

A 2.5 fejezetben és az F2. függelékben részletezett elem mátrixok a rúdnak a keresztmetszeti főtengelyek irányával meghatározott lokális koordináta rendszerében felírt mennyiségek. A lokális x , r , s és a globális X , Y , Z rendszer közötti, a 2.1. ábrán is követhető transzformáció két lépésből áll: a keresztmetszeti mozgásparaméterek áthelyezése az N csomópontba és forgatás a globális X , Y , Z rendszerbe. Az elemek összeillesztésének, az egész szerkezetre vonatkozó rendszer mátrixok összeállításának az alapelve az, hogy a kapcsolódó csomópontokba transzformált mozgás paramétereik (szabadságfokaik) azonosak. Ez a feltétel biztosítja a kapcsolódó szerkezeti elemek között, a kapcsolódó felületek mentén, az elmozdulás vektormező szükséges mértékű folytonosságát.

4.1. Az "ST6" modell

Először vizsgáljuk meg röviden a végelem módszer (mozgás módszer) keretében szokásos kapcsolási eljárást. A 4.1. ábra szerint, a keresztmetszet síkjában lévő közös N csomópont legyen a lemez középfelületén, aminek a mozgás és forgás paramétereit a rúdelem lokális rendszerében

$$\Delta^N = [u_x, u_y, u_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \vartheta]^T. \quad (4.1)$$



4.1. ábra. merevítő elem kapcsolása

Az $r = -y_{NC}$ és $s = -z_{NC}$ koordinátájú N csomópont mozgása a (2.4a) összefüggés alapján:

$$u_x = \bar{u} - \beta y_{NC} + \gamma z_{NC} + \mathcal{G} \varphi^N, \quad u_y = v + \alpha (z_{NC} + z_{CS}), \quad u_z = w - \alpha (y_{NC} + y_{CS}), \quad (4.2)$$

$$\alpha_x = \alpha, \quad \alpha_y = \beta, \quad \alpha_z = \gamma,$$

és ebből a lokális és a csomóponti változók transzformációja

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{NC} & -y_{NC} & -\varphi^N \\ 0 & 1 & 0 & -(z_{NC} + z_{CS}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (y_{NC} + y_{CS}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \mathcal{G} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Ez a transzformáció azonos keresztmetszetű rúdelemek kapcsolása esetén az egész keresztmetszet mentén biztosítja a (2.2) elmozdulások folytonosságát. Rúd és lemez/héj kapcsolásnál a mozgások folytonossági feltételének pontosítása, különös tekintettel a csavarás hatására, további vizsgálatokat igényel.

4.2. Az "ST7" modell

Ha az egyenes rúdelem nem csak a keresztmetszetében, hanem a palástja mentén is csatlakozik egy másik elemhez, akkor a mozgások folytonosságát a tengelyével párhuzamos kapcsoló vonal mentén is biztosítani kell. A csavarás során, miközben a keresztmetszet a S pont körül α szöggel elcsavarodik, az eredetileg egyenes, az N pontokon átmenő, x tengely irányú anyagi vonal spirál alakot vesz fel. Az ebből származó forgás arányos az S és N pontok távolságával. A 4.2 ábra jelöléseivel, a spirálforgás ϕ vektora

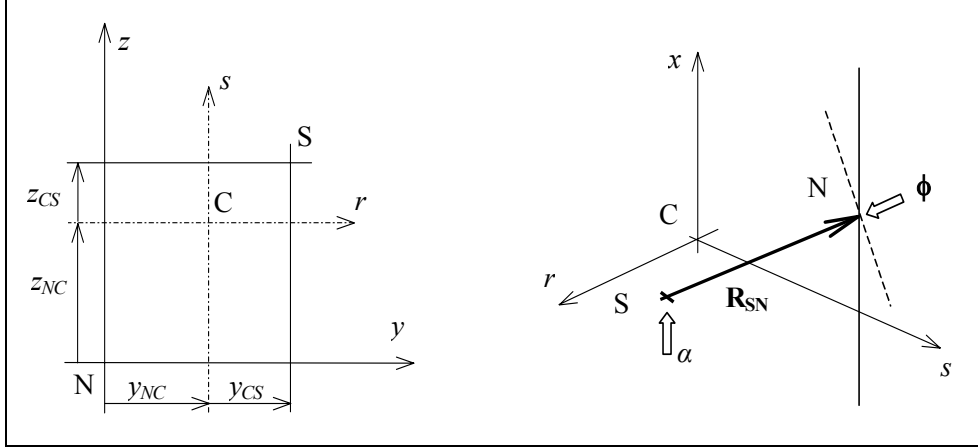
$$\phi = -\frac{d\alpha}{dx} \mathbf{R}_{SN} = \mathcal{G}(\mathbf{R}_{NC} + \mathbf{R}_{CS}) = \mathcal{G} \begin{bmatrix} 0 \\ y_{NC} + y_{CS} \\ z_{NC} + z_{CS} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Ezzel kiegészítve a (4.2) egyenleteket, az N ponthoz tartozó forgási szabadságfokok a következő formában írhatóak fel:

$$\alpha_x = \alpha, \quad \alpha_y = \beta + \mathcal{G}(y_{NC} + y_{CS}), \quad \alpha_z = \gamma + \mathcal{G}(z_{NC} + z_{CS}), \quad (4.5)$$

amiből a keresztmetszeti mozgásparaméterek és a csomóponti változók inverz kapcsolata illetve a transzformáció mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{NC} & -y_{NC} & y_{NC}z_{CS} - z_{NC}y_{CS} - \varphi^N \\ 0 & 1 & 0 & -(z_{NC} + z_{CS}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (y_{NC} + y_{CS}) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_{NC} + y_{CS}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(z_{NC} + z_{CS}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \vartheta \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$



4.2. ábra. A spirál forgás definíciója

A (4.5) egyenletekhez más módon is eljuthatunk. Írjuk fel a (2.4a) \mathbf{U} vektor gradiens tenzorát:

$$\mathbf{D} = [U_{k,n}] = \begin{bmatrix} u' + \vartheta' \varphi + \beta'(s - z_{CS}) - \gamma'(r - y_{CS}) & \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \gamma & \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \beta \\ v' - \alpha'(s - z_{CS}) & 0 & -\alpha \\ w' + \alpha'(r - y_{CS}) & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

A \mathbf{D} tenzor asszimmetrikus részének, a különbségi forgás tenzornak a vektor invariánsa az $\boldsymbol{\omega}$ forgás vektor (Béda, Kozák, Verhás [11], 38. oldal):

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

aminek koordinátái (2.34) és (2.36) Bernoulli-Vlasov feltételek helyettesítésével

$$\begin{aligned} \omega_x &= \alpha, \\ \omega_y &= \frac{1}{2}(\beta - w') + \frac{1}{2} \left(\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \alpha'(r - y_{CS}) \right) = \beta + \frac{1}{2} \vartheta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} - (r - y_{CS}) \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}(\gamma + v') - \frac{1}{2} \left(\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \alpha'(s - z_{CS}) \right) = \gamma - \frac{1}{2} \vartheta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + (s - z_{CS}) \right). \end{aligned}$$

A φ függvény első parciális deriváltjait az 1. függelék (F1.1a-b) egyenletekből fejezhetjük ki:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\tau_{xr}}{Gg} + (s - z_{CS}) , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\tau_{xs}}{Gg} - (r - y_{CS}) .$$

Helyettesítés után a forgásvektor koordinátái:

$$\omega_x = \alpha , \quad \omega_y = \beta - g(r - y_{CS}) + \frac{\tau_{xr}}{2G} , \quad \omega_z = \gamma - g(s - z_{CS}) - \frac{\tau_{xs}}{2G} . \quad (4.7)$$

Ha a kapcsoló vonal - és közelítőleg az N csomópont is - a rúd terheletlen palástján van, ahol a csúsztató feszültségek értéke zérus és $r = -y_{NC}$, $s = -z_{NC}$, akkor az ω forgásvektor koordinátái megegyeznek a (4.5) transzformáció utolsó három egyenletével: $\omega_x = \alpha_x$, $\omega_y = \alpha_y$, $\omega_z = \alpha_z$. Ebből látszik, hogy a (4.6) transzformáció szigorúan véve csak akkor igaz, ha a kapcsoló vonal a merevítő rúdelem terheletlen palástján van. Ezt az ellentmondást csak úgy lehetne feloldani, ha kilépnénk a rúd elmélet köréből.

4.2.1. Kezdeti kapcsoló erők excentricitása

Ha két mechanikai rendszert összekapcsolunk, akkor a kapcsolt rendszer virtuális munka elvében a rész-rendszerekre vonatkozó tagok összeadódnak. A következő egyenletben a rúdelemre vonatkozó virtuális munka elvében szereplő, például a (2.37) alakú tagok indexe legyen 1, a rúdhoz kapcsolt rész-rendszerhez tartozó tagoké pedig 2:

$$(\delta(\Pi_L + \Pi_{Gi} + \Pi_{Ge})_1 - \delta\Pi_{M1} - \delta W_1) + (\delta\Pi_2 - \delta\Pi_{M2} - \delta W_2) = 0 .$$

A Π_2 belső szerkezetét a merevítendő rész mechanikai modellje szabja meg, az lehet vékony vagy vastag lemez, görbült héj, vagy akár egy másik rúdmodell. A δW_1 és δW_2 tagok a rész-rendszerekre ható összes külső erő növekmények virtuális munkái, amelyek tartalmazzák a két rendszer közötti kapcsoló erő növekmény munkáját is. Ez a virtuális munka rész, ha a kapcsolódó felületen a mozgások folytonosak, az összegzés során kiesik és a $\delta W_1 + \delta W_2 = \delta W$ összeg már csak a kapcsolt rendszerre ható külső erő növekmények hatását írja le:

$$(\delta(\Pi_L + \Pi_{Gi} + \Pi_{Ge})_1 - \delta\Pi_{M1}) + (\delta\Pi_2 - \delta\Pi_{M2}) - \delta W = 0 .$$

Ennek a rövid gondolatsornak a célja annak igazolása, hogy a rúdelem geometriai merevségének kiszámításakor a

$$\Pi_{Ge} = - \int_A^1 p_i U_i^* dA \quad (4.8)$$

tagot, vagyis a kezdeti kapcsoló erőrendszert és annak excentricitását is figyelembe kell venni.

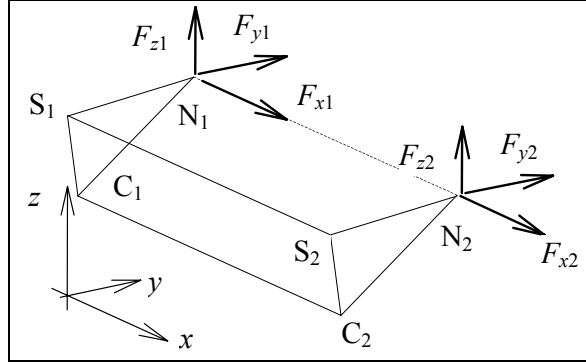
A 2.5. fejezet szerinti VEM7 modellben a (2.50) interpoláció következménye, hogy a kezdeti terhelésekből kiszámított N húzó és V_r , V_s nyíró igénybevételek értéke elemenként

állandó. Ezt az állandó igénybevételi állapotot az elem kapcsoló vonalának

$$y_{SP} = y_{SN} = -(y_{NC} + y_{CS}) , \quad z_{SP} = z_{SN} = -(z_{NC} + z_{CS}) \quad (4.9)$$

koordinátájú N_1 és N_2 végpontjaiban működő

$$F_{x1} = -N , \quad F_{y1} = -V_r , \quad F_{z1} = -V_s , \quad F_{x2} = +N , \quad F_{y2} = +V_r , \quad F_{z2} = +V_s . \quad (4.10)$$



4.3. ábra. Excentrikus kapcsoló erők

koncentrált erőkkel is létre lehet hozni. A kezdeti igénybevételek tekintetében a kapcsoló felületen megoszló erőrendszer és az elemvégi koncentrált erők egyenértékűek. Ezeket az erőket és a (4.9) koordinátákat a (2.28) egyenletbe helyettesítve, kezdeti kapcsoló erőrendszer munkáját a forgás növekményeken a

$$\begin{aligned} \Pi_{Ge} = & -\frac{1}{2} \left[(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (V_r y_{SN} + V_s z_{SN}) + (\beta_1^2 - \beta_2^2) V_s z_{SN} + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) V_r y_{SN} - \right. \\ & \left. - (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) N y_{SN} - (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2) N z_{SN} - (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2) (V_r z_{SN} + V_s y_{SN}) \right] , \end{aligned} \quad (4.11)$$

összefüggés szerint lehet számolni amiből az erők-igénybevételek megfelelő helyettesítésével az (F2.3a) alakú geometriai merevségi mátrix egyszerűen kifejezhető. A kapcsoló felület/vonal mentén megoszló erőrendszerrel egyenértékű elem végponti (4.10) koncentrált terhelő erőrendszerben az erők mellett természetesen erőpárok is vannak. Azonban a kapcsoló erő az belső erő, és amint azt a 2.4.1. fejezetben igazoltuk, a (2.33) alakú virtuális munka elvében a belső erők nyomatékai szemitangens természetűek. A (2.32) szerint a szemitangens erőpárok virtuális munkája zérus, így azok a (4.11) kifejezésben nem szerepelnek.

A (4.6) és (4.11) eredmények kapcsán a következőket érdemes megjegyezni:

- A (4.6) mátrix tartalmazza a (4.3) transzformációt is, így az egyszerre biztosítja a mozgások keresztmetszeti és a kapcsoló vonal menti folytonosságot.
- A (4.3) és (4.6) transzformációk között csak a mátrixok hetedik oszlopaiban van különbség. Ezek a tagok kapcsolják össze a rúd tengelyirányú – húzó, hajlító – mozgásait és a vetemedési paraméteren keresztül a csavaró mozgást.

- c. A mátrixok hetedik oszlopának első elemében szerepel a φ^N mennyiség, ami a *St Venant* féle csavarási vetemedési függvény értéke az N csomópontban. Ennek akkor van szerepe, ha az excentrikus húzás csavaró hatását is modellezni akarjuk. Ismeretes, hogy a rúd elcsavarodik a húzóerő hatására, ha az a keresztmetszet olyan pontjában működik, ahol a φ nem zérus értékű (*Ponomarjov*, [52] 85. oldal).
- d. A (4.11) egyszerű alak a (2.50) alakú harmadfokú interpoláció következménye. Magasabb foksámú interpoláció esetén a megoszló kapcsolóerő rendszer hatásának számítására a (2.27) összefüggést kellene használni.
- e. A (4.6) transzformáció ebben a formájában bármely más, csomópontonként hét szabadságfokú rúdelemhez használható, függetlenül az elem csomópontjainak számától vagy az alkalmazott rúd elmélettől.
- f. A (4.6) transzformáció megszerkesztésénél csak a kis alakváltozások feltételét használtuk fel, ezért az nem csak homogén és lineárisan rugalmas anyagtulajdonság, hanem más anyagtörvény – például kis képlékeny alakváltozás, vagy anizotróp, réteges, kompozit anyagú rudak – esetén is alkalmazható.

5. MEREVÍTETT LEMEZ VIZSGÁLATA

Amint azt már az 1.1. fejezetben részletesebben kifejtettük, a merevített lemezszerkezetek vizsgálatával foglalkozó publikációk a merevítő elem csavarási merevségét vagy teljesen elhanyagolják vagy csak a *St-Venant* féle szabad csavarási hatást veszik figyelembe. A következőkben a szerkezetek lemez/héj részének modellezéséhez használt négy csomópontos vastag síkhéj elem a szakirodalomban MITC4 néven ismert (Mixed Interpolation of Tensorial Components, *Bathe* és *Dvorkin* [9]) lemezelem és egy membrán elem kombinációja. A membrán komponensben az elem síkjára merőleges forgási merevséget – angolul ”drilling freedom” – *Cook* [18] által javasolt módon határoztuk meg. Az elemkombináció részletes, magyar nyelvű leírása megtalálható az [S3] kutatási jelentés 3. fejezetében. Ez a síkhéj elem működik a *FemDesign* végelem programrendszerben is ([22], [16] 269. oldal) és amennyire ezt meg lehetett állapítani, ugyanolyan, mint a COSMOS/M programrendszer SHELL4T nevű vastag héjeleme [20]. Az átvizsgált közleményekben nem található olyan részletesen leírt és így reprodukálható, ellenőrizhető számítási eredmény, amit felhasználhatnánk a numerikus vizsgálatokhoz. A saját számítási eredmények ellenőrzéséhez és minősítéséhez ezért többnyire a COSMOS/M v2.6 végelem rendszer SHELL4T héjeleméből összeállított modelleket alkalmazzuk.

A számításokhoz különböző modelleket használunk, ezek jelölése a következő:

ST7	VEM7 rúd és MITC4 síkhéj elemek a 4.2 és 4.2.1. fejezetek szerinti kapcsolása
ST6	VEM7 rúd és MITC4 síkhéj elemek 4.1 fejezet szerinti kapcsolása
SHELL4T	COSMOS/M héjelemből álló modell
SHELL4T+BEAM3D	COSMOS/M héjelem és térbeli rúdelem kapcsolása

5.1. táblázat. Számítási modellek jelölése

A numerikus vizsgálatokhoz használható modell méreteinek meghatározásánál fontos volt, hogy a mérnöki szempontból reális terhelések és méretek mellett a merevítő rúdelem csavaró mozgása is jelentős legyen. Figyelembe vettük *Sheikh, Elwi* és *Grondin* [59] eredményeit, akik a merevített lemezek lehetséges mozgásainak vizsgálatához tizenegy különböző méret, karcsúsági, anyagjellemző és terhelés viszonyszámot definiáltak.

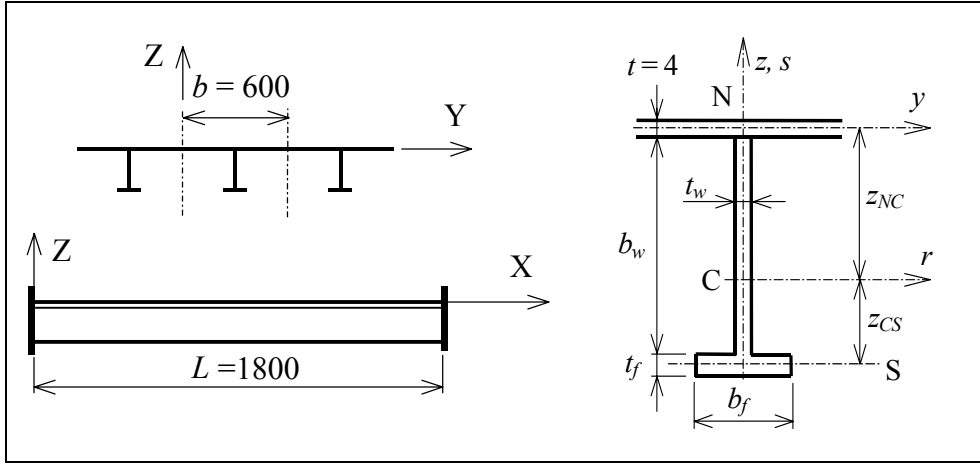
A továbbiakban vizsgáljuk az 5.1 ábra szerinti, téglalap alakú, párhuzamos és azonos osztású T szelvényű rudakkal merevített sík lemeznek egy b szélességű részét. A sáv X

tengellyel párhuzamos oldalain a szimmetria peremfeltételek:

$$u_Y = 0, \quad \Theta_X = \Theta_Z = 0. \quad (5.1a)$$

A panel két vége legyen teljesen befogott, itt a peremfeltételek:

$$u_X = u_Y = u_Z = 0, \quad \Theta_X = \Theta_Y = \Theta_Z = 0, \quad \vartheta = 0. \quad (5.1b)$$



5.1. ábra. Merevített lemez méretei (mm)

A rúd változó merevség hatásának vizsgálatánál rögzített lemez méretek mellett ($b = 600$ mm, $t = 4$ mm) a merevítő elem arányait megtartva, méretét változtatjuk. Az 5.1 ábra szerinti vékony szelvényű T keresztmetszet jellemzői a t_w függvényében:

$$\begin{aligned} t_f &= t_w, \quad b_f = 10t_f, \quad b_w = 20t_w, \\ A &= 30t_w^2, \quad I_r = 1402,5t_w^4, \quad I_s = 85t_w^4, \quad J = 10t_w^4, \quad I_\omega = 0, \\ \beta_r &= 16t_w, \quad z_{NC} = -(13,5t_w + 2), \quad z_{CS} = -7t_w, \end{aligned} \quad (5.2a)$$

és a dimenziótlan lemez – merevítő terület arányszám:

$$\delta = \frac{A_s}{A_p} = \frac{b_f t_f + b_w t_w}{bt} = \frac{t_w^2}{80}. \quad (5.2b)$$

Például, $\delta = 0,2$ arány esetén a merevítő elem keresztmetszeti jellemzői:

$$\begin{aligned} t_f &= 4 \text{ mm}, \quad t_w = 4 \text{ mm}, \quad b_w = 80 \text{ mm}, \quad b_f = 40 \text{ mm}, \quad A = 480 \text{ mm}^2, \quad I_r = 3,590 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, \\ I_s &= 2,176 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad J = 2,56 \cdot 10^3 \text{ mm}^4, \quad I_\omega = 0, \quad \beta_r = 64 \text{ mm}, \quad z_{NC} = -56 \text{ mm}, \quad z_{CS} = -28 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Az anyagjellemzők legyenek:

$$E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,3, \quad \rho = 8,0 \cdot 10^{-9} \text{ N sec}^2/\text{mm}^4. \quad (5.3)$$

A számítási modellekben a lemezsávon 36x12, a SHELL4T modellben a vékonyfalú T szelvény egy keresztmetszetében 6 héjelemet alkalmaztunk. Ez az elemsűrűség biztosítja a fontosabb eredmények legalább három tizedesjegynyi pontosságát.

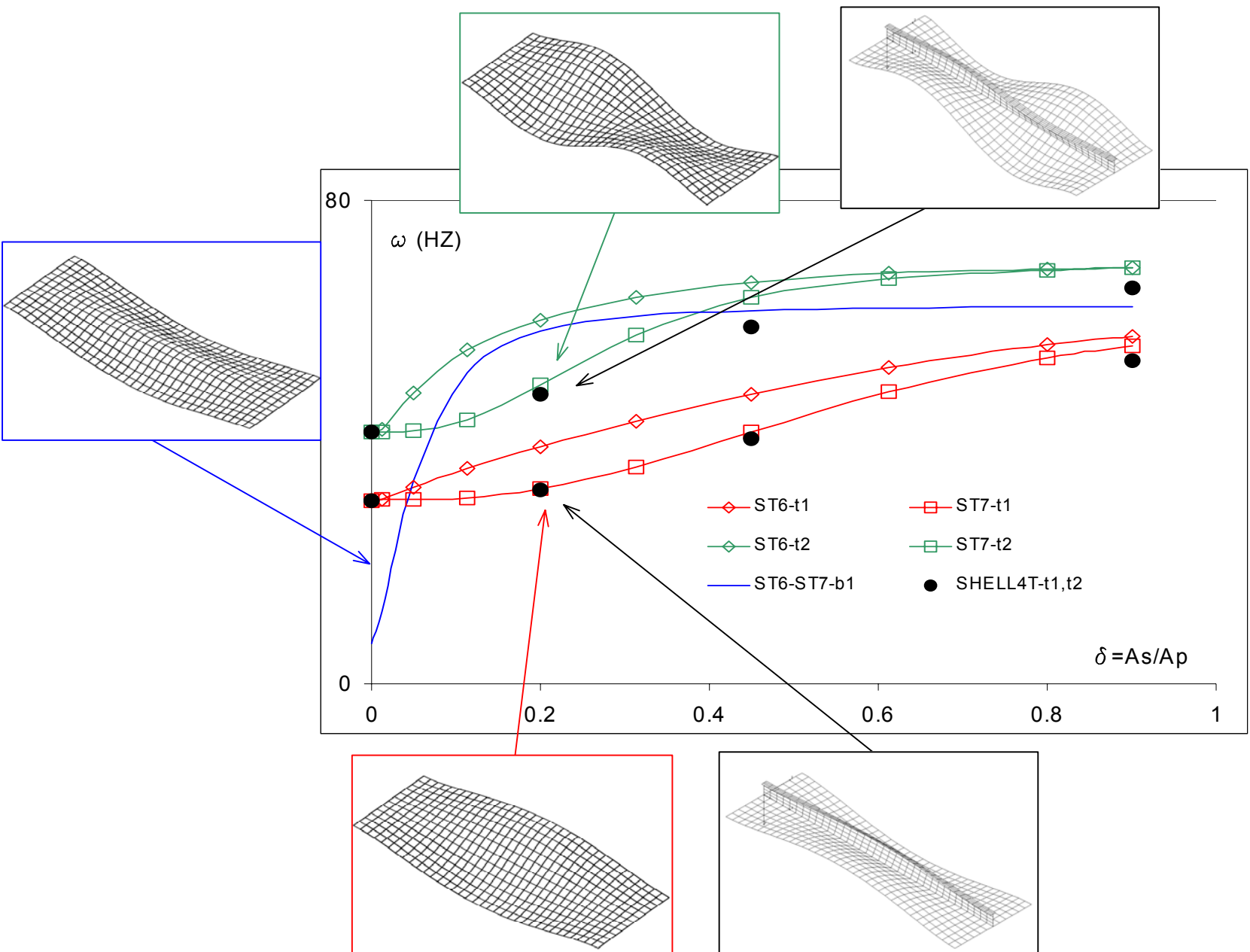
5.1. Lemez szabad lengései

Először vizsgáljuk az 5.1. ábra szerinti panel szabad lengéseit. Az 5.2 ábra a δ terület arány függvényében mutatja az első három - $b1$ hajlító és $t1$, $t2$ csavaró - sajátfrekvencia változását. Az ábra alapján a következőket állapíthatjuk meg:

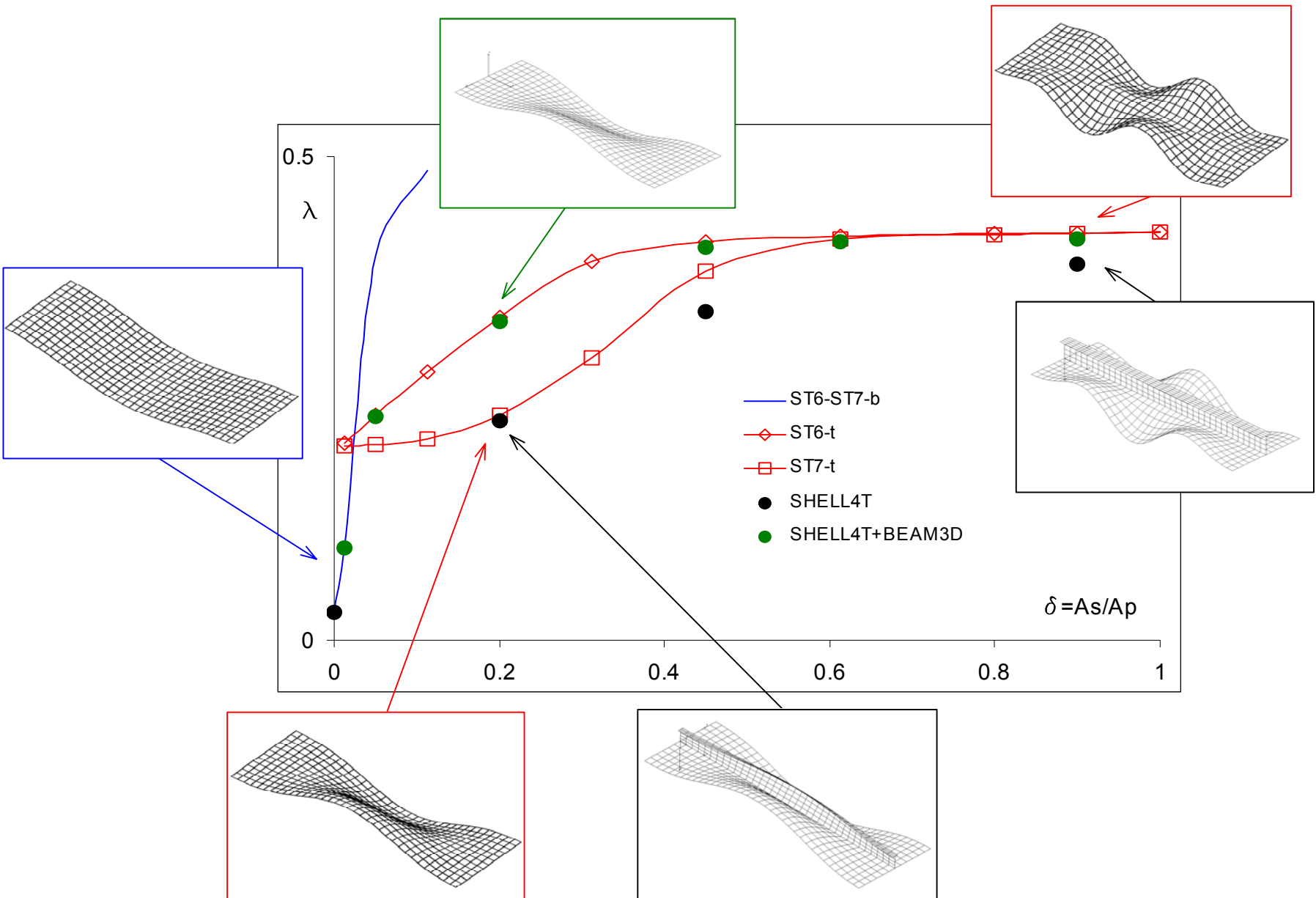
- A $b1$ hajlító frekvencia értéke (kék vonal) az ST6 és ST7 modellek esetén azonos. Ilyenkor a merevítő elem nem csavarodik, csak hajlító lengést végez, ezért a (4.3) és (4.6) transzformációk közötti eltérés, a transzformációs mátrixok hetedik oszlopa nem működik.
- A $t1$ és $t2$ csavaró frekvenciáknál az ST6 és ST7 értékek (piros és zöld vonalak) azonosak ha $\delta = 0$, azaz nincs merevítő elem.
- Nagyobb merevítő keresztmetszeteknél, növekvő δ esetén az ST6 és ST7 eredmények különbsége csökken, a két (piros és zöld) vonal közel azonos értékűvé válik. A rúd mozgását a hozzá képest csökkenő merevségű lemez egyre kisebb mértékben módosítja, így a két rész közötti kapcsolat módjának hatása is csökken.
- Ha az összekapcsolt rúd és lemez elemek merevsége összemérhető, az ST6 és ST7 modellekkel kiszámolt $t1$ és $t2$ frekvenciákban jelentős különbség mutatkozik. Mindig az ST7 értékek a kisebbek, tehát ez a kapcsolási eljárás a modell eredő merevségét csökkenti. Az 5.1 táblázatból megállapítható, hogy a $t1$ torziós frekvenciában a legnagyobb eltérés több mint 20%.
- A SHELL4T eredmények (fekete pontok) az ST7 vonalak közelében vannak, ami arra utal, hogy az ST7 értékek a pontosabbak. A nagyobb δ értékeknél tapasztalható nagyobb eltérés oka a SHELL4T héj modellben megjelenő rúd nyírási alakváltozás lehet, ami a *Bernoulli – Vlasov* rúdmodellből (2.3.4. fejezet) természetesen hiányzik. Ezt a kérdést a 2.3.3. fejezetben ismertetett *Timoshenko – Vlasov* modell alkalmazásával lehetne tisztázni.
- A különböző modellekből a $\delta = 0,2$ környezetében eltérő lengéskép sorrend adódik. A frekvenciák növekvő sorrendjében az ST6 modell szerinti sorrend $t1$ - $b1$ - $t2$, az ST7 eredmények szerint $t1$ - $t2$ - $b1$. A lengésképek pontatlansága jelentős hibát eredményezhet a további dinamikai számításokban, például a modálanalízis alkalmazásánál.

$\delta = 0,2$ ($t_w = 4$ mm)				$\delta = 0,9$ ($t_w = 8,5$ mm)			
mode	ST6	ST7	SHELL4T	mode	ST6	ST7	SHELL4T
$t1$	39,23	32,24	32,11	$t1$	57,45	55,93	53,58
$t2$	60,27	49,42	47,97	$b1$	62,47	62,47	62,31
$b1$	58,33	58,33	57,33	$t2$	68,96	68,79	65,45

5.1. táblázat. Sajátfrekvenciák, ω (Hz).



5.2. ábra. Mérévített lemez szabad lengései



5.3. ábra. Mérévített lemez kritikus nyomó terhelése

5.2. Nyomott lemez kritikus terhelése

Az 5.1. ábra szerinti panel X irányú kezdeti nyomó terhelését az u_{x0} axiális elmozdulás megadásával hozzuk létre. Az $X = L$ peremen az (5.1b) peremfeltételekben $u_X = u_{x0} = -1$ mm elmozdulás az 5.1. ábra szerinti hosszmérettel és az (5.3) anyagjellemzővel

$$\sigma_0 = u_{x0} \frac{E}{L} = -111,1 \text{ MPa} \quad (5.4)$$

átlagos nyomó feszültségnek felel meg. Az (1.2) sajátérték feladat legkisebb λ sajátértéke a kritikus terhelés paramétere és ezzel a kritikus nyomó feszültség $\sigma_{scr} = \lambda \sigma_0$.

Az 5.3. ábra mutatja a λ terhelés paraméter, a különböző kihajlott alakok - melyekben a merevítő elem hajlítása (b) vagy csavarodása (t) a domináns mozgásforma - és a δ terület arány kapcsolatát. Az ábra alapján a következőket állapíthatjuk meg:

- Ha a merevítő keresztmetszete zérus vagy kicsi, a globális, vagy *Euler* féle kihajlás mutatkozik. A δ növelésével a λ teher paraméter gyorsan növekszik (kék vonal). Mivel a merevítő elem nem csavarodik, az ST6 és ST7 eredmények azonosak.
- Növekvő merevítő keresztmetszetenél a merevítő elem elcsavarodó – angolul „tripping” – alakja jelentkezik (piros vonal). Itt már jelentős a különbség az ST6 és ST7 eredmények között, de – az előző fejezet sajátfrekvencia eredményeihez hasonlóan - mindig az ST7 értékek a kisebbek, vagyis az ST7 modell merevsége kisebb. A hat szabadságfokú merevítő rúdelem csavaró merevségének csökkentésére *Patel*, *Datta* és *Seikh* [50] egy csavaró korrekciós faktor alkalmazását javasolták. Az ST7 modellben a 4.2 és 4.2.1. fejezetekben ismertetett, mechanikailag értelmezhető és megalapozott kapcsolási eljárással értük el a csavaró merevség kívánatos csökkenését.
- Nagyobb merevítő keresztmetszeteknél az ST6 és ST7 eredmények különbsége csökken, a két vonal azonos, közel állandó értékűvé válik. Ezen a részen a merev rudak a lemezt önálló részekre osztják és a nyomott lemezsávok kritikus terhelése a rúd keresztmetszet további növelésével már nem változik.
- A SHELL4T eredmények (fekete pontok) az ST7 vonal közelében vannak, ami arra utal, hogy az ST7 értékek a pontosabbak.
- Az ST6 és a SHELL4T+BEAM3D eredmények (zöld pontok) a vizsgált méret tartományban gyakorlatilag azonosak. A 4.1. fejezet szerint az ST6 modell a kapcsolat módját tekintve ugyanaz, mint a SHELL4T+BEAM3D, csak abban a csomópontonként hat szabadságfokú rúdelem helyett a 2.5. fejezet szerinti VEM7 elem szerepel. Ezek szerint a jelentős numerikus eredmény változás az α csavaró forgás és a v , w lehajlások azonos szintű (2.50) interpolációjának és a 4.2, 4.2.1. fejezetekben ismertetett kapcsolási

eljárásnak a következménye. Ebben a feladatban kisebb a rúd saját csavarási jellemzőinek a jelentősége, mivel most az (5.2a) jellemzők között $I_{\omega} = 0$.

f. Az 5.2 táblázat szerint $\delta = 0,2$ esetén az ST6 és ST7 eredmények közötti eltérés közel 30%, ami igen jelentős, főleg ha figyelembe vesszük, hogy ez az ST7 modellben a biztonság javára történő változás.

δ (t_w , mm)	ST6	ST7	SHELL4T	SHELL4T + BEAM3D
0,00 (0,0)	0,0294	0,0294	0,0293	
0,20 (4,0)	0,3344	0,2325	0,2274	0,3297
0,45 (6,0)	0,4125	0,3813	0,3395	0,4063
0,90 (8,5)	0,4211	0,4207	0,3919	0,4148

5.2. táblázat. Kritikus terhelési paraméter λ .

A szakirodalomban elfogadott besorolás szerint merevített lemezeknél nyomás következtében háromféle stabilitásvesztési forma jelentkezhet: globális vagy *Euler* féle kihajlás, továbbá két lokális alak, a merevítő elcsavarodása vagy a lemez horpadása. Negyediknek még meg szokták említeni a merevítő rúd alaktorzulásával járó formákat is, ezek vizsgálata azonban már túl mutat a rúd elmélet korlátain. A stabilitásvesztés utáni állapotot vizsgálva, *Sheikh, Elwi, Grondin* [59] és mérések alapján *Ghavami* [23] megállapították, hogy a többi lehetséges formával összevetve, a merevítő elem elcsavarodása (*tripping*) különösen veszélyes, mert ez jár az egész szerkezet teherbírásának vagy a merevségének legnagyobb mértékű csökkenésével. Ezt a jelenséget illusztrálja az idézett [59] közleményből átvett 5.4.a ábra.

Az 5.3. ábrából megállapítható, hogy a nagyobb keresztmetszetű merevítő rudak a lemezt önálló sávokra osztják és ezért a szerkezet kritikus terhelése a rúd keresztmetszet további növelésével már nem változik. Ezt az állandó szakaszt többek között *Bedair* [13], *Brubak* és *Hellesland* [17] analitikus vizsgálatai is kimutatták, náluk azonban a globális kihajlást jelentő kezdeti rész után közvetlenül a lokális lemezhorpadást jelentő vízszintes szakasz következik, mivel a merevítő rudaknál csak a *St-Venant* féle szabad csavarási hatással számoltak. Ezt mutatja a [17] közleményből átvett 5.4.b. ábra, ahol hiányzik az 5.3. ábrán a kék vonal és a $\delta \approx 0,6$ pont közötti átmeneti szakasz, ahol a különösen veszélyesnek minősített lokális stabilitásvesztési forma, a merevítő elem elcsavarodása lép fel.

A merevítő elem elcsavarodását - a "tripping" jelenségét - *Zheng* és *Yuren* [72] egy olyan *Vlasov* rúdmodellel vizsgálták, gátolt csavarási elméletet alkalmazták, ahol a

kapcsolódó lemez részt egy lineárisan rugalmas vonaltámasz helyettesíti. Ebből a vonaltámasz modellből hiányzik lemeznek a terhelésekkel változó geometriai merevsége. Bár a lemez hullámosodásának merevség csökkentő hatását különböző faktorokkal számolják, ez a modell csak erősen merevített, gyenge lemezelésű szerkezetekre ad elfogadható eredményt.

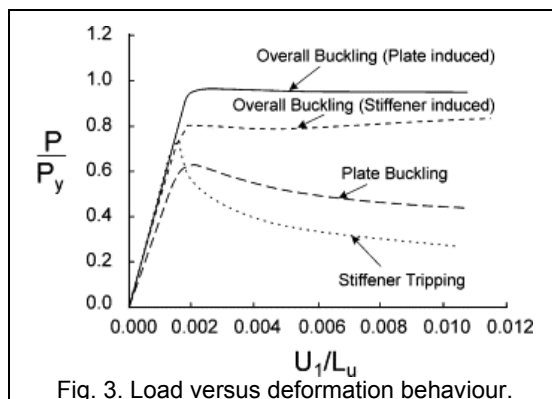


Fig. 3. Load versus deformation behaviour.

5.4a. ábra. Stabilitásvesztés utáni teherbírás változás, *Sheikh, Elwi, Grondin* [59].

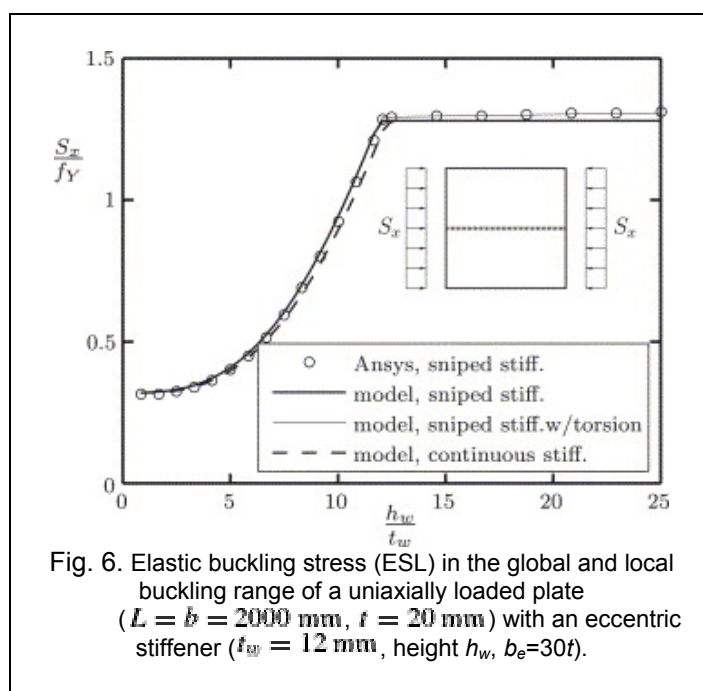


Fig. 6. Elastic buckling stress (ESL) in the global and local buckling range of a uniaxially loaded plate ($L = b = 2000$ mm, $t = 20$ mm) with an eccentric stiffener ($t_w = 12$ mm, height h_w , $b_e = 30t$).

5.4.b. ábra. Nyomott lemez globális és lokális stabilitásvesztése, *Brubak és Hellesland* [17].

5.3. Nyomott lemez szabad lengései

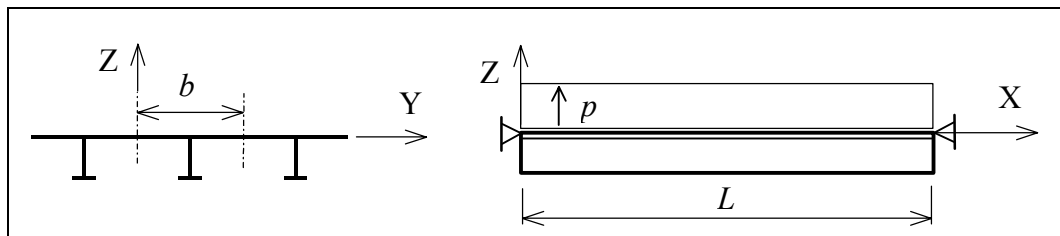
A 3.3. fejezetben bemutatott megoldások is igazolták azt a közismert tényt, hogy a rugalmas szerkezetekre ható állandó terhelések megváltoztatják a szerkezet dinamikai jellemzőit. Az (1.3) alakú másodrendű dinamikai feladat megoldásával most röviden azt mutatjuk be, hogy a nyomó terhelés hogyan módosítja az 5.1. ábra szerinti merevített lemez dinamikai viselkedését. Az (5.2b) szerinti lemez – merevítő terület arányszám legyen $\delta = 0,2$.

Az 5.6 ábra mutatja az ST7 modellel kiszámolt első öt sajátfrekvencia, lengéskép és az (5.1) szerinti kezdeti nyomó feszültség λ terhelés paraméterének kapcsolatát. A $\lambda = 0$ értéknél az első három $t1$, $t2$, $b1$ frekvencia megegyezik az 5.1. táblázatban, illetve az 5.2. ábrán megadottakkal. Ha a terhelés paraméter közelít az 5.2. táblázat szerinti $\lambda_{cr} = 0,2325$ kritikus értékhez, akkor a legkisebb frekvencia zérushoz tart. A többi sajátfrekvencia is csökken, bár a hajlító lengéseknél (piros vonalak) a csökkenés mértéke kisebb. A terhelés növelésével a lengésképek sorrendje is változik, az első ($t3 - b2$) sorrend váltás a kritikus terhelés 30% körül jelentkezik.

A különböző frekvenciák és lengésképek változására vonatkozó megállapítások nem általánosíthatóak, más méretviszonyú és kezdeti terhelésű szerkezetben más jellegű változásokat tapasztalhatunk. Azt viszont a bemutatott eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy a jelenség vizsgálatára az ST7 modell alkalmas.

5.4. Hajlított lemez kritikus terhelése

Az 5.1. ábrán adott méretű merevített lemez terhelése legyen p felületi nyomás. A kritikus terhelés értéke irányonként változik, ha a p felfelé mutat, a merevítő elemekben, ha lefelé mutat, a lemezben lesz a jellemző igénybevétel nyomás, és ennek megfelelően a stabilitásvesztési formák is eltérőek lesznek.



5.5. ábra. Merevített lemez, felületi nyomás

Vizsgáljuk az azonos osztású T szelvényű rudakkal merevített sík lemeznek egy b szélességű részét. A sáv X tengellyel párhuzamos oldalain a szimmetria peremfeltételek:

$$u_Y = 0, \quad \Theta_X = \Theta_Z = 0. \quad (5.5a)$$

A panel két végén, a lemez középfelületén lévő csomópontokban a támaszok legyenek az 5.6 ábra szerinti rögzített csuklók. Itt a peremfeltételek:

$$u_X = u_Y = u_Z = 0. \quad (5.5b)$$

Mivel ez a megfogás nem a lemez-rúd rendszer semleges tengelyén van, a hajlítás mellett, az excentrikus elhelyezés miatt a p irányától függően, további húzó vagy nyomó igénybevételek keletkeznek.

A kezdeti állapotot jellemző terhelés legyen $p_0 = 1$ MPa. Az (1.2) sajátérték feladat legkisebb λ sajátértéke a kritikus terhelés paramétere és ezzel a kritikus nyomás $p_{cr} = \lambda p_0$.

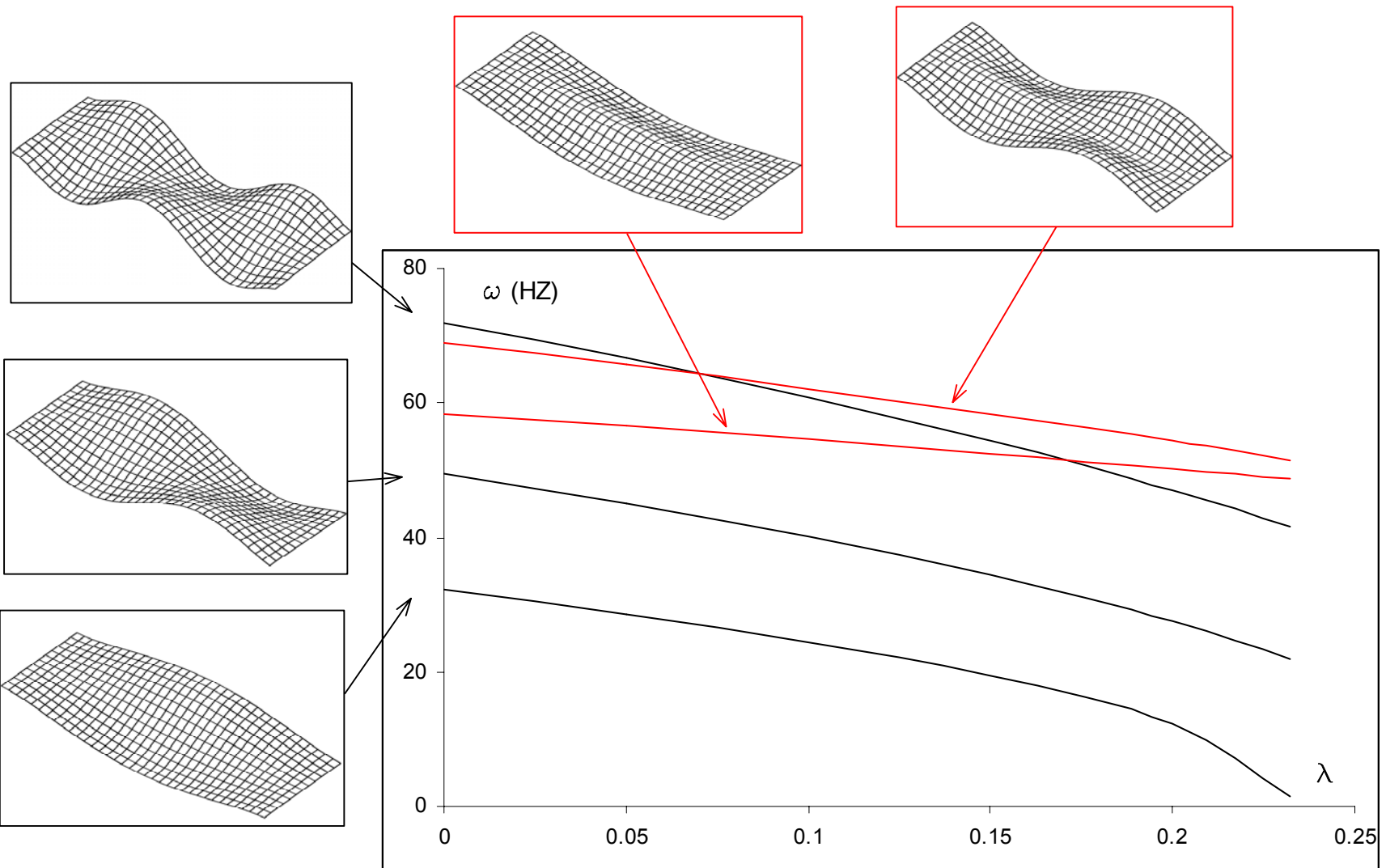
Az 5.7. ábra mutatja a λ terhelés paraméter, a különböző kihajlott alakok és az (5.2b) szerinti δ terület arány kapcsolatát. Az ábra alapján a következőket állapíthatjuk meg:

- Ha a λ negatív, azaz ha a p iránya az 5.6. ábra szerint lefelé mutat, akkor a merevítő elem méretétől függetlenül mindig a lemez rész hullámosodik. A lefelé mutató terhelés közvetlen hajlító hatása a felül lévő lemezben X irányú nyomó igénybevételt hoz létre, ugyanakkor az excentrikus támaszokban az X irányú reakció erők a lemezt húzásra terhelik. A két ellentétes hatás eredménye a közel lineárisan növekvő (negatív irányban) λ terhelés paraméter.
- Ha a λ pozitív - a p felfelé mutat - és a merevítő keresztmetszete kicsi, globális, vagy *Euler* féle kihajlás mutatkozik (kék vonal). A merevítő elem nem csavarodik, az ST7 és a SHELL4T eredmények nagy pontossággal azonosak. (5.3. táblázat)
- A pozitív λ részen, növekvő merevítő keresztmetszetenél a merevítő elem elcsavarodik – angolul „tripping” – alakja jelentkezik (piros vonal). A SHELL4T eredmények (fekete pontok) itt is az ST7 vonalhoz vannak közelebb.

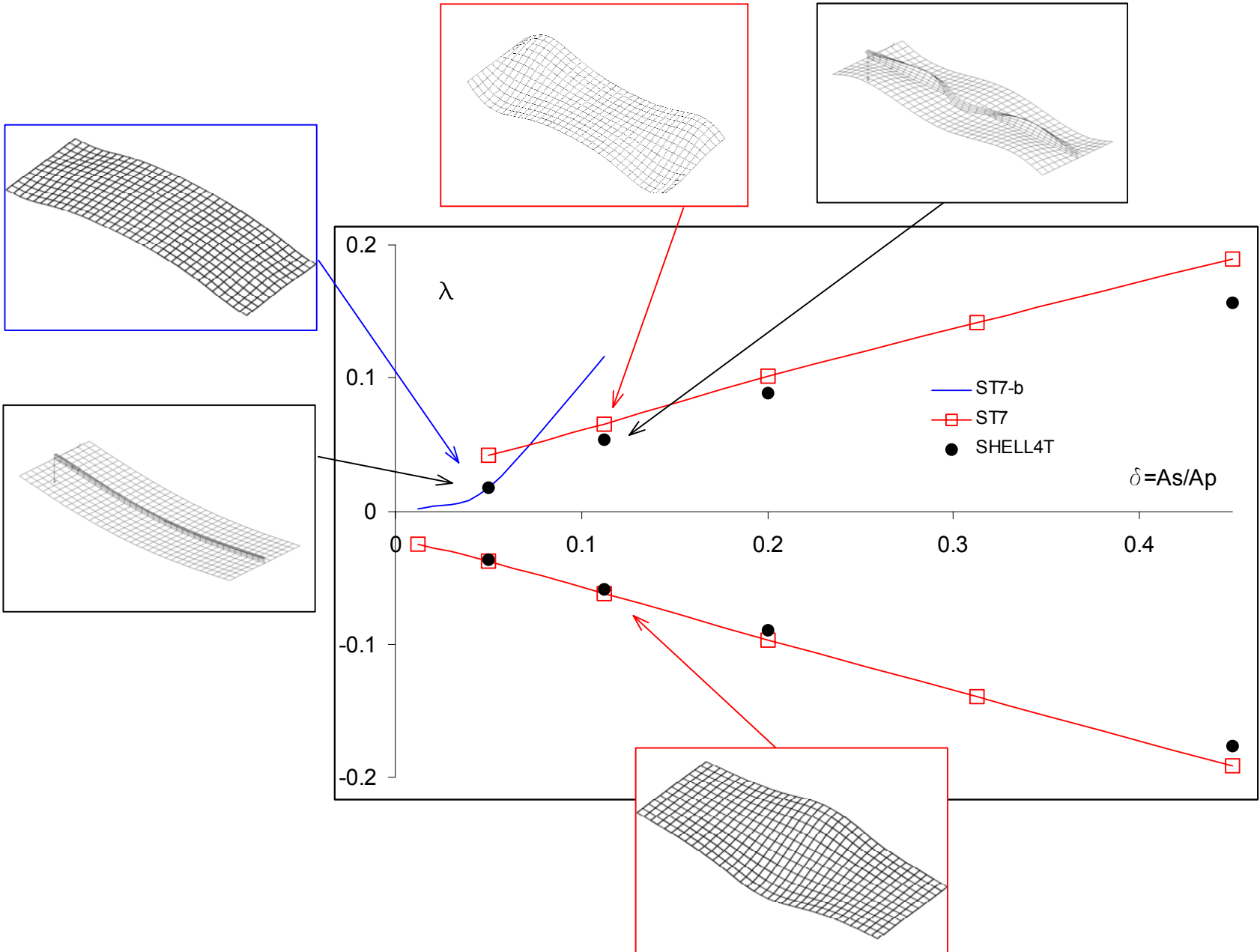
δ (t_w , mm)	ST7	ST6	SHELL4T
0,05 (2)	+0,0171 / -0,0377		+0,0175 / -0,0364
0,1125 (3)	+0,0652 / -0,0625	+0,0355 / -0,0798	+0,0541 / -0,0588
0,20 (4)	+0,1012 / - 0,0966	+0,0900 / -0,1209	+0,0882 / -0,0892
0,45 (6)	+0,1891 / -0,1916	+0,1991 / -0,2149	+0,1565 / -0,1763

5.3. táblázat. Kritikus terhelési paraméter λ .

Ebben a fejezetben bemutatott megoldások igazolják, hogy az ST7 modell a lehetséges lengési és stabilitásvesztési formákat elfogadható pontossággal leírja.



5.6. ábra. Merveített lemez nyomó terhelés - frekvencia - lengéskép változása
($\delta = 0,2$, $\lambda_{cr} = 0,2325$)



5.7. ábra. Merveített lemez kritikus felületi nyomás terhelése

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A 2. fejezetben a véges forgások, kis alakváltozások linearizált elméletének felhasználásával levezettem az egyenes rudak vizsgálatára alkalmas virtuális munka elvet és ez alapján a „VEM7” végeelem modell mátrixait. Igazoltam, hogy ez a rúdmodell térbeli szerkezetek vizsgálatára is alkalmas, mivel az abban szereplő kezdeti belső erők nyomatékai – a hajlító és a csavaró nyomatékok is – szemitangens tulajdonságúak. A 4. fejezetben bemutattam a rúd és lemez/héj elemek összekapcsolására alkalmas transzformációkat. Megállapítottam, hogy a mozgások folytonosságának feltétele mellett, mivel rudaknál a terhelésnek a nyíróközépponthez viszonyított excentricitása, az úgynevezett „load stiffness” hatás is lényeges, az elemek közötti kapcsoló vonalon megoszló belső erőrendszer illesztése is szükséges.

A 3. és az 5. fejezetben ismertetett feladatok és numerikus megoldások - a fontos és kötelező numerikus ellenőrzések mellett - bemutatták a csomópontonként hét szabadságfokú rúd végeelem modell széleskörű, helyenként a szokásos gépészeti, mérnöki alkalmazások keretein túlmutató lehetőségeit. A dolgozatban a következő feladatok megoldását részleteztem:

- térbeli keretszerkezet kritikus terhelése,
- tetszőleges keresztmetszetű csavart tengelyek stabilitása,
- időben állandó hajlító terhelésű tengelyek szabad rezgéseinek frekvenciája és lengésképei,
- merevített sík lemez szabad lengései,
- saját síkjában nyomott lemez kritikus terhelése,
- saját síkjában nyomott lemez szabad lengései
- hajlított lemez kritikus terhelése.

Ezek alapján is megállapítható, hogy az elmélet és a kapcsolódó VEM7 végeelem modell jól használható a célkitűzésekben megfogalmazott jelenségek vizsgálatára.

A mérnöki alkalmazások szempontjából fontos részletkérdés az esetenként jelentős számú keresztmetszeti jellemző gyors és pontos számítása. Az F2. fejezetben a csavarási és nyírási peremérték feladatokat szélsőérték elvek formájába írtam át. Az átfogalmazott feladatok numerikus megoldásához a végeelem módszer eszközeit használtam. A módszer előnye, hogy alkalmazásakor nem kell megkülönböztetni a különböző típusú – például vékony nyitott, többcellás vagy zárt - szelvényeket, ezek egységesen kezelhetők.

6.1. Új tudományos eredmények

Az eredmények ismeretében megfogalmazhatjuk az 1.2. fejezet végén feltett kérdésre a választ. Ha a merevítő elem mozgásában a csavaró komponens is megjelenik, akkor a rúdelem torziós jellemzőinek, excentricitásának vagy tömegeloszlásának közelítő vagy pontosabb modellezése jelentős mértékben módosítja a számítási eredményeket.

A dolgozatban részletesen bemutatott téziseimet a következőkben foglalom össze:

1. Igazoltam, hogy a rúdelemre ható konzervatív erőrendszer szemitangens nyomatékainak (idegen) munkája az elmozdulás növekményen zérus.
2. Felírtam a csomópontonként hét szabadságfokú, egyenes rúdelem mátrixait,
 - 2a. A geometriai merevségi mátrixnak a direkt nyírást és az axiális mozgást is tartalmazó alakját,
 - 2.c. A kvázitangens nyomatékú kezdeti külső terhelés geometriai merevségi mátrixát,
 - 2.d. A teljes, energetikailag konzisztens tömegmátrixot,
3. Kidolgoztam a merevítő rúd és a lemez/héj modell végeelem kapcsolásának módszerét.
 - 3.a. Felírtam a mozgások és forgások kapcsoló vonal menti folytonosságát biztosító transzformáció mátrixát.
 - 3.b. Levezettem a kezdeti belső (kapcsoló) erő excentricitását leíró geometriai merevségi mátrixot.
4. Kidolgoztam a merevített felületszerkezetek statikai, stabilitási és dinamikai problémáinak megoldására alkalmas algoritmust.
 - 4.a. Elkészítettem a számítások elvégzésére alkalmas végeelem programrendszert.
5. Kidolgoztam egy, a tetszőleges geometriájú rudak keresztmetszeti jellemzőinek számítására alkalmas algoritmust és számítógépi programot. Ezzel a csavarási és nyírási jellemzőket a rugalmasságtani alapegyenletekből levezetett elliptikus peremérték feladatok végeelem megoldása alapján határozhatjuk meg. A számítógépi program a kereskedelmi forgalomban is kapható FEM-Desig programrendszer részét képezi.

6.2. Hasznosítás lehetőségei

Mivel a vékonyfalú rudakkal merevített szerkezetek fontos szerepet játszanak a könnyűszerkezetű, súlytakarékos teherviselő gépelemek kialakításában, a bemutatott eredmények és főleg a számítási módszer hasznosítása a mérnöki munkában kézenfekvő.

A további kutatás-fejlesztés célja a módszer megbízhatóságának alaposabb elemzése és az alkalmazási kör bővítése lehet. A közvetlen kutatási célok között megemlíteném a *Timoshenko - Vlasov* modell alkalmazását, különös tekintettel a kompozit szerkezetekre, a nagy mozgások és a posztkritikus állapot vizsgálatára alkalmas módszert és az időben periodikusan változó terhelések, a dinamikus stabilitás kérdésének vizsgálatát.

7. HIVATKOZÁSOK

1. Anderson JM, Trahair NS "Stability of monosymmetric beams and cantilever" *J. Structural Engineering (ASCE)*, Vol.98. pp. 2647-62. (1972)
2. Archer GC, Whalen TM "Development of rotationally consistent diagonal mass matrices for plate and beam elements" *Computer Methods in Appl. Mech. Engng.* Vol.194. pp.675-89. (2005)
3. Argyris JH, Hilpert O, Malejannakis GA, Scharpf DW "On the geometric stiffness of beam in space – a consistent V.W approach" *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* Vol.20. pp.105-31. (1979)
4. Argyris, JH "An excursion into large rotations" *Computer Methods in Appl. Mech. Engng.* Vol.32. pp. 85-155. (1982)
5. Attard MM "Lateral buckling analysis of beams by the FEM" *Computers and Structures* Vol.23(2). pp. 217-31. (1986)
6. Barik M, Mukhopadhyay M "A new stiffened plate element for the analysis of arbitrary plates" *Thin-Walled Structures* Vol. 40. pp.625-39. (2002)
7. Barsuom RS, Gallagher RH "Finite element analysis of torsional –flexural stability problems" *Int. J. Numerical Methods in Engng.* Vol.2. pp.335-52. (1970)
8. Bathe KJ, Ramm E, Wilson EL "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis" *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol.9. pp.353-86. (1975)
9. Bathe KJ, Dvorkin EH "A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation" *Int J Num Meth in Engng* Vol.21. pp. 367-83. (1985)
10. Bathe KJ "Finite Element Procedures" Prentice-Hall, New-Jersey (1998)
11. Béda G, Kozák I, Verhás J "Kontinuummekanika", Műszaki Könyvkiadó (1986)
12. Bedair OK, Troitsky MS "A study of the fundamental frequency characteristics of eccentrically and concentrically simply supported stiffened plates" *Int. J. Mechanical Sciences* Vol.39(11), pp.1257-72. (1997)
13. Bedair, OK "The elastic behavior of multi stiffened plates under uniform compression" *Thin-Walled Structures* Vol.27. pp. 311-35. (1997)
14. Bescoter SU "A theory of torsion bending for multicell beams" *J Appl. Mechanics* Vol.21. pp.25-34. (1954)
15. Bercin AN, Tanaka M "Coupled flexural-torsional vibrations of Timoshenko beams" *Sound Vibr.* Vol 207. pp.47-59. (1997)
16. Bojtár I, Gáspár Z "Végeselemmédszer építőmérnököknek" Terc, Budapest (2003)
17. Brubak L, Helleland J "Approximate buckling strength analysis of arbitrary stiffened, stepped plates" *Engineering Structures* Vol.29(9). pp.2321-33. (2007)
18. Cook RD. "On the Allman triangle and related quadrilateral element" *Comput Struct* Vol. 22. pp.1065-67. (1986)
19. Cortinez VH, Piovan MT, Rossi RE "Comments on coupled flexural-torsional vibrations of Timoshenko beams" *J. Sound and Vibration* Vol. 224(2). pp.375-78. (1999)
20. COSMOS/M v2.6 User Manual, Structural Research and Analysis Corporation (SRAC) CD version, (2000)
21. Farkas J "Fémszerkezetek" Tankönyvkiadó, Budapest (1974)
22. FEM-Design 7.0 User Manual, StruSoft honlap, <http://www.fem-design.com/>
23. Ghavami K "Experimental study of stiffened plates in compression up to collapse" *J. Construct. Steel Research* Vol.28. pp.197-222. (1994)
24. Ghavami K, Khedmati MR "Numerical and experimental investigation on the compression behaviour of stiffened plates" *J. Construct. Steel Research* Vol.62. pp.1087-100. (2006)

-
25. Goto Y, Li XS, Kasugay T "Buckling analysis of elastic space rods under torsional moment" *J. Engineering Mechanics (ASCE)* Vol.122(9). pp.826-33. (1996)
 26. Gu JX, Chan SL "A refined finite element formulation for flexural and torsional buckling of beam-columns with finite rotations" *Engineering Structures* Vol.27. pp.749-59. (2005)
 27. Hsiao KM, Yang RT, Lin WY "A consistent finite element formulation for linear buckling analysis of spatial beams" *Computer Methods in Appl. Mech. Engng.* Vol.156. pp.259-76. (1998)
 28. Hsiao KM, Lin WY "A co-rotational formulation for thin-walled beams with monosymmetric open section" *Computer Methods in Appl. Mech. Engng.* Vol.190. pp. 1163-85. (2000)
 29. Hughes OF, Ghosh B, Chen Y "Improved prediction of simultaneous local and overall buckling of stiffened panels" *Thin-Walled Structures* Vol.42. 827-56. (2004)
 30. Iványi M, Papp F "Acél CAD" Műgyetemi Kiadó, Budapest (1998)
 31. Iványi M "Stabilitástan" 95009, Műgyetemi Kiadó, Budapest (2006)
 32. Jirousek J "A family of variable section curved beam and thick shell or membrane stiffening isoparametric elements" *Int. J. Numerical Methods in Engng.* Vol.17. pp.171-86. (1981)
 33. Kim MY, Chang SP, Kim SB "Spatial stability analysis of thin-walled space frames" *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol.39. pp.499-525. (1996)
 34. Kim MY, Chang SP, Kim SB "Spatial postbuckling analysis of nonsymmetric thin-walled frames. II: Geometrically non-linear FE procedures" *J. Engineering Mechanics (ASCE)* Vol.127(8), 779-90. (2001)
 35. Kim MY, Chang SP, Park HG „Spatial postbuckling analysis of nonsymmetric thin-walled frames. I: Theoretical considerations based on semitangential property" *J. Engineering Mechanics (ASCE)* Vol.127(8). pp.769-78. (2001)
 36. Kim MY, Yun HT, Kim NI "Exact dynamic and stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beam-columns" *Computers and Structures* Vol.81. pp. 1425-48. (2003)
 37. Kim MY, Kim NI, Kim SB „Spatial stability of shear deformable nonsymmetric thin-walled curved beams: a centroid-shear center formulation" *J. Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 132(12). pp.1313-25. (2006)
 38. Kim NI, Jeon SS, Kim MY „An improved numerical method evaluating exact static stiffness matrices of thin-walled beam-columns on elastic foundations" *Computers and Structures*, Vol. 83, pp.2003-22. (2005)
 39. Kim NI, Dong KS, Kim MY „Improved flexural-torsional stability analysis of thin-walled composite beam and exact stiffness matrix" *Int. J. Mechanical Sciences* Vol.49, pp.950-69. (2007)
 40. Kim SB, Kim MY "Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin walled tapered beams and space frames" *Engineering Structures* Vol.22. pp.446-58. (2000)
 41. Kiss F "A new aspects for the use of thin walled beams as shell stiffeners of spacecraft structures" *Proc. of conf. on "Spacecraft Structures and Mechanical Testing"* Noordwijk, The Netherlands, Oct. 19-21.1987. pp.455-59. (1987)
 42. Kitipornchai S, Chan, SL "Stability and non-linear finite element analysis of thin walled structures" in *Finite element applications to thin-walled structures*, ed. Bull, J.W. Elsevier (1989)
 43. Kollár LP "Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation" *Solids and Structures*, Vol.38. pp.7543-58. (2000)
 44. Lim NH, Kang YJ "Out of plane stability of circular arches" *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 46, pp. 1115-37, (2004)
-

-
45. Ludvig G "Gépek dinamikája" Műszaki Könyvkiadó (1973)
 46. Michelberger P, Fekete A "Könnyűszerkezetek" Tankönyvkiadó, Budapest (1982)
 47. Mohri F, Brouki A, Roth JC "Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, monosymmetric thin-walled beams" *J. Construct. Steel Research* Vol.59. pp.63-90. (2003)
 48. Muttányánszki Á "Szilárdságtan" Műszaki Könyvkiadó, (1981)
 49. Páczelt I, Herpai B "A végelem módszer alkalmazása rúd feladatokban" Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1987)
 50. Patel SN, Datta PK, Sheikh AH "Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels" *Thin-Walled Structures* Vol.44. 321-33. (2006)
 51. Pi YL, Trahair NS, Rajasekaran S "Energy equation for beam lateral buckling" *J. Structural Engineering (ASCE)*, Vol.118(6), pp. 1462-79. (1992)
 52. Ponomarjov SD "Szilárdsági számítások a gépészetben" 2. kötet, Műszaki Könyvkiadó (1964)
 53. Ponomarjov SD "Szilárdsági számítások a gépészetben" 7. kötet, Műszaki Könyvkiadó (1964)
 54. Przemieniecki JS "Theory of matrix structural analysis" McGraw-Hill, NY (1986)
 55. Sabuncu M, Evran K „Dynamic stability of rotating asymmetric cross-section Timoshenko beam subjected to an axial periodic force. *Finite Elements in Anal. Design* Vol.41. pp.1011-26. (2005)
 56. Sapkás A, Kollár LP "Lateral-torsional buckling of composite beams" *Int J Solids and Structures* Vol.39. pp.2939-63. (2002)
 57. Sapountzakis EJ, Mokos VG "An improved model for the dynamic analysis of plates stiffened by parallel beams" *Engineering Structures* Vol.30(6). pp.1720-33.(2008)
 58. Shakourzadeh H, Guo YQ, Batoz JL "A torsion bending element for thin-walled beams with open and closed sections" *Computers and Structures* Vol.55(6). pp. 1045-54. (1995)
 59. Sheikh IA, Elwi AE, Grondin GY "Stiffened steel plates under uniaxial compression" *J. Construct Steel Research* Vol.58(5-8). pp.1061-80. (2002)
 60. Simmonds JG "Tenzoranalízis dióhéjban" Műszaki Könyvkiadó, 1985
 61. Teh LH "Spatial rotation kinematics and flexural-torsional buckling" *J. Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 131(6). pp.598-605. (2005)
 62. Teh LH, Clarke MJ "Symmetry of tangent stiffness matrices of 3D elastic frame" *J. Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 125(2). pp.248-51. (1999)
 63. Teh LH "Cubic elements in practical analysis and design of steel frames" *Engineering Structures* Vol.23. pp.1243-55. (2001)
 64. Teh LH "Beam verification for 3D elastic steel frame analysis" *Computers and Structures* Vol.82(2). pp. 1167-79. (2004)
 65. Timoshenko SP, Gere JM "Theory of Elastic Stability" MacGraw Hill, NY (1961)
 66. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S "Lemezek és héjak elmélete" Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1966)
 67. Turkalj G, Brnic J, Prpic-Orsic J „Large rotation analysis of elastic thin-walled beam-type structures using ESA approach" *Computers and Structures*, Vol. 81. pp.1851-64. (2003)
 68. Vlasov VZ "Thin-walled elastic beams" National Science Foundation, Washington (1961)
 69. Washizu K "Variational methods in elasticity and plasticity" Pergamon Pr. Oxford, (1956)
 70. Wempner G "Mechanics of solids with application to thin bodies" Sijthoff Noordhoff (1981)
 71. Yau JD "Stability of tapered I-beams under torsional moments" *Finite Elements in Anal. Design* Vol.42. pp.914-27. (2006)
-

72. Zheng G, Yuren H "Tripping of thin-walled stiffeners in the axially compressed stiffened panel with lateral pressure and end moment" *Thin-Walled Structures* Vol.43. 789-99. (2005)
73. Ziegler H "Principles of structural stability" Birkhauser, Stuttgart (1977)
74. Zienkiewicz OC "The finite element method" 4th ed. McGraw-Hill, London (1989)

7.1 Saját publikációk az értekezés témájából

- S1. Vörös GM "A variational principle for torsion problem of composite rods" *Periodica Polytechnica*, Vol.23(4), pp 367-76. (1979)
- S2. Vörös GM "A special purpose element for shell-beam systems" *Computers and Structures*, Vol.29(2), pp.301-8. (1988)
- S3. Vörös G "Több funkciós héj és rúdszerkezet számoló végeselem rendszer" kutatási jelentés, NKFP 2002/16. e_Design Projekt, M1. (témavezető Papp F.) (2003)
- S4. Vörös GM "Free vibration of thin walled beams" *Periodica Polytechnica, Ser.Mech.Eng.* Vol.48(1), pp 99-110. (2004)
- S5. Vörös GM "Coupled vibration of thin walled beams" *Proc of ICCES'04, Advances in Computational and Experimental Engng. and Sciences, Funchal, Portugal, 2004.VII.* 26-29. pp.2099-104. CD-Edition (2004)
- S6. Vörös GM, Kirchner I "Calculation of cross sectional properties" *Proc. of GÉPÉSZET 2004*, Budapest, pp.421-26. (2004)
- S7. A gátolt csavarás hatásának vizsgálata rudakban és merevítő rúdelemekben. Habilitációs pályázat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, (2005)
- S8. Vörös GM "Improved formulation of space stiffeners" *Proc of esmc2006, 6th European Solid Mechanics Conference*, Budapest, CD-Edition (2006)
- S9. Vörös GM "Buckling and vibration of stiffened plates" *International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E.)* Vol.1(1), pp 49-60. (2007)
- S10. Vörös GM "An improved formulation of space stiffeners" *Computers and Structures*, Vol.85(7-8) pp.350-59 (2007)
- S11. Vörös GM "Finite element analysis of stiffened plates" *Periodica Polytechnica, Ser.Mech.Eng.* Vol.51(2), pp.1-9. (2007)
- S12. Vörös GM "Mechanical analysis of reinforced plate structures" *Proc. of GÉPÉSZET 2008*, Budapest, pp M-07/1-6. CD-Edition (2008)
- S13. Vörös GM "On coupled bending-torsional vibrations of beams with initial loads" *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Vol.9(2), pp.1-17. (2008)

F1. RUDAK CSAVARÁSA ÉS NYÍRÁSA

Az egyenes, prizmatikus rudak csavarási és nyírási feladatainak rugalmasságtani megoldása, azok pontosabb és részletesebb leírása több helyen is megtalálható a szakirodalomban, – *Ponomarjov* [52], *Wempner* [70] – itt csak az előzőekben többször felhasznált mennyiségek pontos értelmezéséhez szükséges részletekre térünk ki. A következőkben is az F1.1. ábra szerinti derékszögű – *Descartes* féle – koordináta rendszert használjuk, melynek kezdőpontja a keresztmetszet C geometriai középpontja és x a rúd tengelye. Kössük ki továbbá, hogy az r és s tengelyek középponti főtengelyek, azaz

$$\int_A r \, dA = \int_A s \, dA = 0, \quad \int_A rs \, dA = 0, \quad \int_A r^2 \, dA = I_s, \quad \int_A s^2 \, dA = I_r.$$

Csavarásakor az igénybevétel a keresztmetszet síkjára merőleges M_t csavaró nyomaték, nyírásakor pedig az S nyíró középponton átmenő hatásvonalú V_r és V_s nyíróerők és az ezekhez kapcsolódó M_r és M_s hajlító nyomatékok. A csavarási és nyírási feladatok megoldása során a következő egyszerűsítő feltételeket alkalmazzuk:

- a keresztmetszet alakja a terhelés során – x tengely irányából nézve – nem változik,
- a mozgások és az alakváltozások kicsik,
- a rúd anyaga lineárisan rugalmas, homogén és izotróp.
- a rúd palástja terheletlen és nincsen térfogati erőhatás
- a σ_r , σ_s , és τ_{rs} feszültségkomponensek elhanyagolhatóan kicsik
- az M_t csavaró és a V_r , V_s nyíró igénybevételek állandóak

F1.1. A csavarási vetemedési függvények tulajdonságai

Tiszta csavarásakor az *a.* feltétel szerint a keresztmetszet a saját síkjában nézve, ahogy azt az F1.1. ábra is mutatja, mint egy merev alakzat forog az S pont körül. A *b.* feltétel szerint az elmozdulás vektor az

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \alpha(x) \mathbf{e}_x \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S) + u(x, r, s) \mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} u \\ -\alpha (s - z_{CS}) \\ \alpha (r - y_{CS}) \end{bmatrix}$$

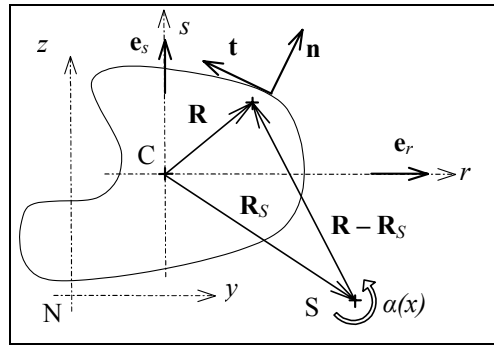
formában írható fel, ahol \mathbf{R} egy tetszőleges anyagi pontba, \mathbf{R}_S az S forgáspontba mutató vektor: $\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + s\mathbf{e}_s$, $\mathbf{R}_S = y_{CS}\mathbf{e}_r + z_{CS}\mathbf{e}_s$. A *b.*, *c.* és *f.* feltételek alapján, az elmozdulás vektorból az alakváltozások a lineáris geometriai egyenletek és a feszültségek az egyszerű *Hooke* törvény szerint a következő formában írhatók fel:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

$$\tau_{xr} = G \gamma_{xr} = G \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \alpha' (s - z_{CS}) \right] , \quad \tau_{xs} = G \gamma_{xs} = G \left[\frac{\partial u}{\partial s} + \alpha' (r - y_{CS}) \right] .$$

Szabad csavarás esetén a keresztmetszet pontjai az x tengely irányában szabadon elmozdulhatnak, ezért a σ_x normál feszültség zérus. Továbbá, mivel minden keresztmetszet alakja és csavaró igénybevétele azonos, a csúsztató feszültségek az x koordinátától függetlenek. A két kikötés következménye:

$\sigma_z = 0$, $\rightarrow u(r, s)$, $\alpha'(x) = \vartheta = \text{állandó}$, $\rightarrow \alpha(x) = \vartheta x + c$,
ahol ϑ a fajlagos elcsavaródás, ami most állandó.



F1.1. ábra. A keresztmetszet csavaró forgása

Vezessük be a *St Venant* féle vetemedési függvényeket a következő definícióval:

$$u = \vartheta \left(\varphi^C - rz_{CS} + sy_{CS} \right) = \vartheta \varphi \quad (\text{F1.1a})$$

ahol $\varphi^C(r, s)$ a C középponthez, $\varphi(r, s)$ pedig az S csavaró középponthez kapcsolt vetemedési függvény. A csavarási csúsztató feszültségek új alakja az (F1.1) helyettesítése után:

$$\tau_{xr} = G\vartheta \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} - s \right) , \quad \tau_{xs} = G\vartheta \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial s} + r \right) . \quad (\text{F1.1b})$$

Ezekkel a belső erőkre vonatkozó $\partial \tau_{xr} / \partial r + \partial \tau_{xs} / \partial s = 0$ egyensúlyi egyenlet a

$$\frac{\partial^2 \varphi^C}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi^C}{\partial s^2} = 0 \quad (\text{F1.2a})$$

alakban írható fel. A *d.* feltétel szerint a rúd palástja terheletlen ezért a keresztmetszet peremgörbén az eredő csúsztató feszültség vektor csak érintő irányú lehet. Ha az F1.1. ábra szerinti **t** és **n** a peremgörbe érintő és kifelé mutató normális egységvektorai, akkor a feszültségekre vonatkozó dinamikai peremfeltétel:

$$\tau_{xr} n_r + \tau_{xs} n_s = 0 , \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \varphi^C}{\partial s} \mathbf{e}_s \right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{t} \quad (\text{F1.2b})$$

A φ^C függvény tulajdonságai:

1. Az (F1.2a) homogén parciális differenciál egyenlet és a keresztmetszet kontúrvonalán az (F1.2b) peremfeltétel egy additív konstanstól eltekintve egyértelműen meghatározza a *St Venant* féle vetemedési függvényt. Ugyanis ha φ^C megoldás, akkor $(\varphi^C + K)$ is megoldás. A K értéke legyen olyan, hogy

$$\int_A \varphi^C dA = 0 \quad . \quad (F1.3a)$$

2. A φ^C vetemedési függvény és a \mathcal{G} fajlagos elcsavarodás a tengelyirányú mozgást nem határozza meg egyértelműen. Az $u(r,s)$ elmozdulás (F1.1) szerinti alakjából látszik, hogy van egy határozatlan, lineáris függvény, melynek együtthatói a csavaró középpont koordinátái. Ez a lineáris függvény a rúdnak egy merevtest szerű mozgását írja le, amit az (F1.2a-b) dinamikai peremérték feladat nem határoz meg. Szükség van egy olyan kiegészítő, kinematikai feltételre, ami ezt a merevtest mozgást korlátozza, kiszűri, de a keresztmetszet szabad vetemedését nem gátolja. Ennek megfelelően írjuk elő, hogy a keresztmetszet pontjainak tengelyirányú mozgása a lehető legkisebb legyen, azaz teljesíti a

$$\int_A u^2 dA = \mathcal{G}^2 \int_A (\varphi^C - rz_{CS} + sy_{CS})^2 dA = \text{minimum} \quad .$$

feltételt. A kétváltozós szélsőérték feladat megoldásából a csavaró középpont koordinátái:

$$y_{CS} = -\frac{1}{I_r} \int_A s \varphi^C dA \quad , \quad z_{CS} = \frac{1}{I_s} \int_A r \varphi^C dA \quad . \quad (F1.4a)$$

3. A rúd igénybevétele tiszta csavarás, ezért a nyíróerők értéke **-zérus-**

$$V_r = \int_A \tau_{xr} dA = G\mathcal{G} \int_A \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} - s \right) dA = 0 \quad , \quad V_s = \int_A \tau_{xs} dA = G\mathcal{G} \int_A \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial s} + r \right) dA = 0 \quad .$$

Mivel az r és s főtengelyek, teljesülnek a következő feltételek:

$$\int_A \frac{\partial \varphi^C}{\partial r} dA = 0, \quad \int_A \frac{\partial \varphi^C}{\partial s} dA = 0 \quad . \quad (F1.5a)$$

4. A belső erők nyomatéka az C pontra megegyezik a csavaró igénybevétellel:

$$M_t = \int_A (r\tau_{yz} - s\tau_{xz}) dA = G\mathcal{G} \int_A \left(r^2 + r \frac{\partial \varphi^C}{\partial s} + s^2 - s \frac{\partial \varphi^C}{\partial r} \right) dA \quad ,$$

amiből az $M_t = G\mathcal{G}J$ definíció szerint a csavarási másodrendű nyomaték

$$J = I_r + I_s - \int_A \left(s \frac{\partial \varphi^C}{\partial r} - r \frac{\partial \varphi^C}{\partial s} \right) dA \quad . \quad (F1.6a)$$

5. Ha φ^C az (F1.2a-b) megoldása, akkor a *Gauss-Ostrogradszkij* tétel felhasználásával elvégezhető a következő átalakítás:

$$\int_A \left(s \frac{\partial \varphi^C}{\partial r} - r \frac{\partial \varphi^C}{\partial s} \right) dA = \int_A \left(\left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial s} \right)^2 \right) dA$$

amiből az (F1.6a) felhasználásával a következő összefüggés írható fel:

$$\int_A \left(\left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial s} \right)^2 \right) dA = I_r + I_s - J \quad . \quad (F1.7a)$$

A φ függvény tulajdonságai:

A súlyponti és a csavaró középponti vetemedési függvényeknek az (F1.1a) definíció szerinti kapcsolata:

$$\varphi = \varphi^C - rz_{CS} + sy_{CS} \ , \quad \varphi^C = \varphi + rz_{CS} - sy_{CS} \ .$$

Ebből az (F1.3a) - (F1.7a) új alakjai, mivel az r és s középponti főtengelyek, sorrendben a következők lesznek:

$$\int_A \varphi \, dA = 0 \quad (F1.3b)$$

$$\int_A s \varphi \, dA = 0 \ , \quad \int_A r \varphi \, dA = 0 \ . \quad (F1.4b)$$

$$\int_A \frac{\partial \varphi}{\partial r} dA = -Az_{CS} \ , \quad \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial s} dA = Ay_{CS} \quad (F1.5b)$$

$$J = I_r + I_s - \int_A \left(s \frac{\partial \varphi}{\partial r} - r \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) dA \quad (F1.6b)$$

$$\int_A \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 \right) dA = I_r + I_s + A(y_{CS}^2 + z_{CS}^2) - J \quad (F1.7b)$$

F1.2. A nyíró faktorok

Csavarásmentes nyírás esetén a V_r és V_s nyíróerők hatásvonalai átmennek a keresztmetszet S nyíró középpontján. Mivel a keresztmetszet főtengelyeivel párhuzamos V_r és V_s nyíró igénybevételek egymástól függetlenek, először vizsgáljuk csak a V_r és a kapcsolódó M_s hajlítás hatását. Egyenes hajlítás közben a rúd pontjai csak az F1.2. ábra szerinti x és y irányokba mozognak. A *Bernoulli* hipotézist felhasználva az elmozdulás koordináták:

$$U_x = -v'r + \frac{V_r}{AG} \psi_r \ , \quad U_y = v \ , \quad U_z = 0 \ ,$$

ahol $\psi_r(x, r, s)$ a nyírási vetemedési függvény és $v(x)$ a rúd tengelyének lehajlása. Az alakváltozások a lineáris geometriai egyenletek és a feszültségek az egyszerű Hooke törvény szerint a következő formában írhatók fel:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ev''r + \frac{V_r}{A} \frac{E}{G} \frac{\partial \psi_r}{\partial x}, \quad \tau_{xr} = G\gamma_{xr} = \frac{V_r}{A} \frac{\partial \psi_r}{\partial r}, \quad \tau_{xs} = G\gamma_{xs} = \frac{V_r}{A} \frac{\partial \psi_r}{\partial s}.$$

Ha a nyírási vetemedést külső kényszerek nem gátolják, akkor a $\psi_r(r, s)$ kétváltozós függvény lesz és a normál feszültségnek csak a lineáris részével kell számolni:

$$\sigma_x = -\frac{M_s}{I_s} r, \quad \tau_{xr} = \frac{V_r}{A} \frac{\partial \psi_r}{\partial r}, \quad \tau_{xs} = \frac{V_r}{A} \frac{\partial \psi_r}{\partial s},$$

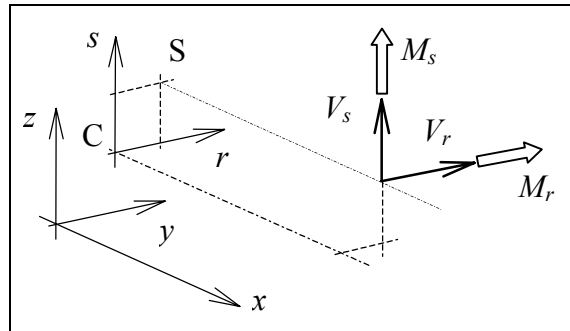
A belső erőkre vonatkozó $\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xr} / \partial r + \partial \tau_{xs} / \partial s = 0$ egyensúlyi egyenlet a feszültségek, valamint az igénybevételek közötti $V_r = dM_s / dx$ kapcsolat helyettesítésével a

$$\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial s^2} = -\frac{A}{I_s} r \quad (\text{F1.8a})$$

alakban írható fel. A *d.* feltétel szerint a rúd palástja terheletlen ezért a keresztmetszet peremgörbájén a feszültségekre vonatkozó dinamikai peremfeltétel

$$\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi_r}{\partial s} \mathbf{e}_s \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{F1.8b})$$

ahol \mathbf{n} a keresztmetszet peremgörbájén a kifelé mutató normális egységvektor.



F1.2. ábra. Csavarás mentes nyírás

A nyírásából származó U alakváltozási energia pontos értékét az (F1.8a-b) peremérték feladat megoldása után az

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A (\gamma_{xr} \tau_{xr} + \gamma_{xs} \tau_{xs}) dA = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xr}^2 + \tau_{xs}^2) dA = \frac{1}{2G} \frac{V_r^2}{A^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial s} \right)^2 \right] dA \\ &= \frac{1}{2G} \frac{V_r^2}{A} \frac{1}{I_s} \int_A \psi_r r dA \end{aligned}$$

összefüggés szerint számolhatjuk, ahol az integrál átalakításánál felhasználtuk a Gauss-Ostrogradszkij tételt.

A nyírási energia közelítő értékét kapjuk, ha azt a keresztmetszetben állandó, a külső terheléssel egyenértékű, átlagos nyíró feszültségből számítjuk ki:

$$\bar{U} = \frac{I}{2G} \int_A \bar{\tau}_{xr}^2 dA = \frac{I}{2G} \int_A \left(\frac{V_r}{A} \right)^2 dA = \frac{I}{2G} \frac{V_r^2}{A}.$$

A nyírási energia pontos és közelítő kifejezéseinek összevetéséből

$$U = \bar{U} \frac{1}{I_s} \int_A \psi_r r dA = k_r \bar{U},$$

ahol az r főirányhoz tartozó nyíró faktor:

$$k_r = \frac{1}{I_s} \int_A \psi_r r dA, \quad (F1.9)$$

Az előzőekhez hasonló módon vizsgálva a V_s nyíró igénybevétel hatását, a

$$\sigma_x = \frac{M_r}{I_r} s, \quad \tau_{xr} = \frac{V_s}{A} \frac{\partial \psi_s}{\partial r}, \quad \tau_{xs} = \frac{V_s}{A} \frac{\partial \psi_s}{\partial s},$$

feszültségekből az egyensúlyi egyenletek felhasználásával a

$$\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} = -\frac{A}{I_r} s, \quad \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi_s}{\partial s} \mathbf{e}_s \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (F1.10)$$

peremérték feladatot írhatjuk fel, aminek megoldása után az s főirányhoz tartozó nyíró faktor:

$$k_s = \frac{1}{I_r} \int_A \psi_s s dA. \quad (F1.11)$$

F1.3. Keresztmetszeti jellemzők számítása

Az (F1.2), (F1.8) és (F1.10) elliptikus peremérték feladatokat az ismert eljárást követve a következő variációs számítási feladatok formájában is fel lehet írni:

$$\delta \int_A \left\{ \frac{I}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial s} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial \varphi^C}{\partial r} s + \frac{\partial \varphi^C}{\partial s} r \right) \right\} dA = 0, \quad (F1.12a)$$

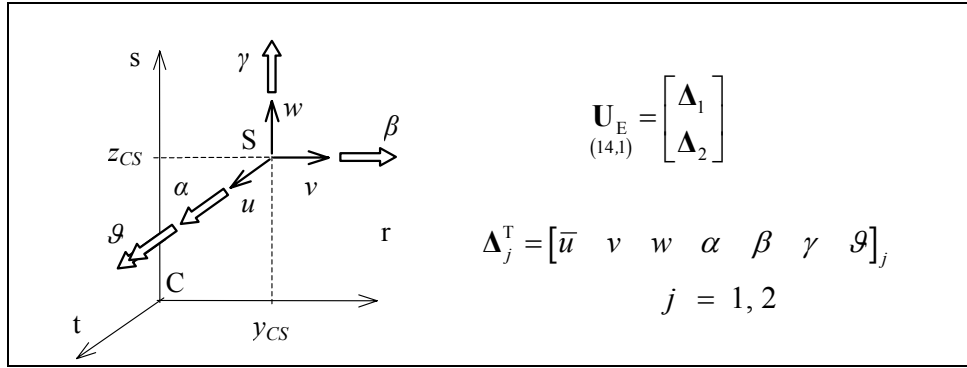
$$\delta \int_A \left\{ \frac{I}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial s} \right)^2 \right] - \psi_r r \frac{A}{I_s} \right\} dA = 0, \quad (F1.12b)$$

$$\delta \int_A \left\{ \frac{I}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial s} \right)^2 \right] - \psi_s s \frac{A}{I_r} \right\} dA = 0. \quad (F1.12c)$$

Ezeket a szélsőérték feladatokat végeelem módszerrel oldottuk meg. Az alkalmazott elemtípus síkbeli 8 és 6 csomópontos, másodfokú, izoparametrikus elem, csomópontonként egy szabadságfokkal. Mivel mind a három esetben azonos a “merevségi” mátrixot adó másodfokú rész, és csak a lineáris részek különböznek, az egyenletrendszer megoldásánál az

“egy szerkezet három terhelési eset” lehetőségét is ki lehet használni. Az egyes terhelési esetekhez tartozó $\varphi^C(r,s)$, $\psi_r(r,s)$ és $\psi_s(r,s)$ megoldásokból az előzőekben felsorolt, szükséges keresztmetszeti jellemzők kiszámíthatóak. További, igen hasznos lehetőség, hogy ezekkel a megoldásokkal, az egyes keresztmetszetek csavaró és nyíró igénybevételeinek ismeretében, a csúsztató feszültség eloszlásokat is meg lehet határozni. A végeelem hálózat a többi, integrál formában meghatározott (terület, másodrendű nyomatékok, stb.) keresztmetszeti jellemző gyors és pontos kiszámítására is felhasználható. A módszer előnye, hogy alkalmazásakor nem kell megkülönböztetni a különböző típusú – például vékony nyitott, többcellás vagy zárt – szelvényeket, ezek egységesen kezelhetők. Az eljárás pontosságára vonatkozó összehasonlító vizsgálatok eredményeit az [S6] publikáció ismerteti. A módszert a FEM-Design programrendszer Section_Editor moduljában alkalmaztuk, [16], [22].

F2. A "VEM7" ELEM MÁTRIXOK



F2.1. ábra. Csomóponti szabadságfokok

Lineáris merevségi mátrix

A lineáris merevségi mátrix definíciója a (2.51) egyenlet:

$$\delta \mathbf{U}_E^T \mathbf{k}_L \mathbf{U}_E = \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA \bar{u}^2 + EI_r w''^2 + EI_s v''^2 + EI_\omega \alpha''^2 + GJ \alpha'^2 \right) dx,$$

$$\mathbf{k}_L = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ d & 0 & -e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & -e & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f & 0 & 0 & g \\ 2h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{F2.1})$$

$$a = EA/L, \quad b = 12EI_s/L^3, \quad c = 6EI_s/L^2, \quad d = 12EI_r/L^3, \quad e = 6EI_r/L^2, \\ f = 6GJ/5L + 12EI_\omega/L^3, \quad g = GJ/10 + 6EI_\omega/L^2, \quad h = 2EI_r/L, \quad i = 2EI_s/L, \\ j = 2GJL/15 + 4EI_\omega/L, \quad k = -GJL/30 + 2EI_\omega/L.$$

Geometriai merevségi mátrix

A geometriai merevségi mátrix definíciója a (2.52) egyenlet:

$$\delta \mathbf{U}_E^T \mathbf{k}_{Gi} \mathbf{U}_E = \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_1(v''w' - v'w'') + M_2(v''\alpha - v'\alpha') + M_3(w''\alpha - w'\alpha') \right. \\ \left. + M_w \alpha'^2 + (V_r w' - V_s v')\alpha + 2(V_r v' + V_s w')(w''z_{CS} + v''y_{CS}) - 2(V_r v' + V_s w')\bar{u}' \right] dx .$$

Az M_r és M_s kezdeti hajlító igénybevételek elemenként lineáris függvény szerint változnak, a többi kezdeti igénybevétel elemenként állandó:

$$\begin{aligned} M_l &= M_t - V_s y_{CS} + V_r z_{CS} , \\ M_2 &= M_r - Nz_{CS} = R_l(1 - \xi) + R_2 \xi , \\ M_3 &= M_s + Ny_{CS} = S_l(1 - \xi) + S_2 \xi , \\ M_w &= N i_p^2 + M_r \beta_r - M_s \beta_s + B \beta_w = P_l(1 - \xi) + P_2 \xi , \\ \xi &= x/L . \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{Gi}^{(14,14)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{G1} & \mathbf{k}_{G12} \\ \mathbf{k}_{G12}^T & \mathbf{k}_{G2} \end{bmatrix} , \quad (\text{F2.2})$$

$$\mathbf{k}_{G1} = \begin{bmatrix} 0 & -v_1 & -v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a & 0 & -i_R + a_2 & t_1 + m_1 & b & -h_R + b_2 \\ & & a & -i_S - a_1 & -b & t_1 + m_1 & -h_S - b_1 \\ & & & d & m_S - b_1 & -m_R - b_2 & g_P \\ & & & & 4c - d_2 & m_2 & 4r_S \\ & & & & & 4c - d_1 & -4r_R \\ & & & & & & 4r_P \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{k}_{G2} = \begin{bmatrix} 0 & -v_1 & -v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a & 0 & -j_R - a_2 & t_1 + m_1 & -b & h_R + b_2 \\ & & a & -j_S + a_1 & b & t_1 + m_1 & h_S - b_1 \\ & & & d & -n_S - b_1 & n_R - b_2 & -f_P \\ & & & & 4c + d_2 & -m_2 & 4s_S \\ & & & & & 4c + d_1 & -4s_R \\ & & & & & & 4s_P \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{k}_{G12} = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -a & 0 & j_R + a_2 & -t_1 - m_1 & b & -h_R - b_2 \\ v_2 & 0 & -a & j_S - a_1 & -b & -t_1 - m_1 & -h_S + b_1 \\ 0 & i_R - a_2 & i_S + a_1 & -d & p_S + b_1 & -p_R + b_2 & f_P \\ 0 & -t_1 - m_1 & b & q_S + b_1 & -c & t_2 + m_1 L / 2 & -r_S - c_1 \\ 0 & -b & -t_1 - m_1 & -q_R + b_2 & -t_2 - m_1 L / 2 & -c & r_R - c_2 \\ 0 & h_R - b_2 & h_S + b_1 & -g_P & -s_S + c_1 & s_R + c_2 & -e \end{bmatrix} ,$$

- A \mathbf{k}_{Gi} mátrix elemeknek a normál és csavaró feszültségekből származó része:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[N(v'^2 + w'^2) + M_1(v''w' - v'w'') + M_2(v''\alpha - v'\alpha') + M_3(w''\alpha - w'\alpha') + M_w\alpha'^2 \right] dx$$

$$\begin{aligned} a &= 6N/5L, & b &= N/10, & c &= NL/30, \\ d &= 3(P_1 + P_2)/5L, & e &= (P_1 + P_2)L/60, \\ t_1 &= M_1/L, & t_2 &= M_1/2, \\ f_p &= P_1/10, & g_p &= P_2/10, & h_p &= (P_1 + P_2)/20, \\ i_p &= (17P_1 + 7P_2)/20L, & j_p &= (7P_1 + 17P_2)/20L, \\ m_p &= (9P_1 + 3P_2)/20, & n_p &= (3P_1 + 9P_2)/20, \\ p_p &= (3P_1 - P_2)/20, & q_p &= (P_1 - 3P_2)/20, \\ r_p &= (3P_1 + P_2)L/120, & s_p &= (P_1 + 3P_2)L/120. \end{aligned} \quad (\text{F2.2.a})$$

Az itt nem részletezett f_R, g_R, \dots, s_R és f_S, g_S, \dots, s_S értékeket a $P \rightarrow R$ és $P \rightarrow S$ helyettesítéssel kapjuk.

- A \mathbf{k}_{Gi} mátrix elemek direkt nyírás része:

$$\frac{1}{2} \int_0^L (V_r w' - V_s v') \alpha dx$$

$$\begin{aligned} a_1 &= V_r/4, & a_2 &= V_s/4, \\ b_1 &= V_r L/20, & b_2 &= V_s L/20, \\ c_1 &= V_r L^2/120, & c_2 &= V_s L^2/120. \end{aligned} \quad (\text{F2.2b})$$

- A \mathbf{k}_{Gi} mátrix elemek axiális mozgás részei:

$$\int_0^L (V_r v' + V_s w') (y_{CS} v'' + z_{CS} w'') dx$$

$$\begin{aligned} d_1 &= V_r y_{CS}, & d_2 &= V_s z_{CS}, \\ m_1 &= (V_s y_{CS} - V_r z_{CS})/L, & m_2 &= (V_r z_{CS} + V_s y_{CS})/2. \end{aligned} \quad (\text{F2.2c})$$

- A \mathbf{k}_{Gi} mátrix elemek átlagos axiális mozgás része:

$$-\int_L (V_r v' + V_s w') \bar{u}' dx$$

$$v_1 = V_r/L, \quad v_2 = V_s/L. \quad (\text{F2.2d})$$

Kezdeti terhelések:

A kezdeti koncentrált terhelés mátrix definíciója a (2.53) egyenlet:

$$\begin{aligned}
 & \delta \mathbf{U}_E^T \mathbf{k}_{Ge} \mathbf{U}_E \\
 &= \delta \frac{1}{2} \left[F_x (z_{SP} \gamma + y_{SP} \beta) \alpha + (F_y z_{SP} + F_z y_{SP}) \beta \gamma - (F_y y_{SP} + F_z z_{SP}) \alpha^2 - F_z z_{SP} \beta^2 - F_y y_{SP} \gamma^2 \right]_i \\
 &+ \delta \frac{1}{2} \left[M_x^q \left((\beta^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_x}{2} - \beta \gamma \cos 2\Theta_x \right) - M_y^q \left((\alpha^2 - \gamma^2) \frac{\sin 2\Theta_y}{2} - \alpha \gamma \cos 2\Theta_y \right) \right. \\
 &\quad \left. + M_z^q \left((\alpha^2 - \beta^2) \frac{\sin 2\Theta_z}{2} - \alpha \beta \cos 2\Theta_z \right) \right]_j .
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{Ge}^{(14,14)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{Ge1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{Ge2} \end{bmatrix}, \quad (F2.3)$$

- Koncentrált erők a j keresztmetszetben:

$$\mathbf{k}_{Gei} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline - (F_y y_{SP} + F_z z_{SP}) & F_x y_{SP} / 2 & F_x z_{SP} / 2 & 0 & 0 & 0 \\ - F_z z_{SP} & (F_y z_{SP} + F_z y_{SP}) / 2 & - F_y y_{SP} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j, \quad i=1, 2. \quad (F2.3a)$$

- Kvázitangens koncentrált nyomatékok a j keresztmetszetben:

$$\mathbf{k}_{Gei} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -M_y^q \sin 2\Theta_y & -M_z^q \cos 2\Theta_z & -M_y^q \cos 2\Theta_y & 0 & 0 & 0 \\ +M_z^q \sin 2\Theta_z & -M_z^q \sin 2\Theta_z & -M_x^q \cos 2\Theta_x & 0 & 0 & 0 \\ \hline -M_x^q \sin 2\Theta_x & +M_x^q \sin 2\Theta_x & -M_y^q \sin 2\Theta_y & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_j, \quad i=1, 2. \quad (F2.3.b)$$

Konzisztens tömegmátrix

A tömegmátrix definíciója a (2.54) egyenlet:

$$\mathbf{m}_{(14,14)} = \rho AL \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_{12} \\ \mathbf{m}_{12}^T & \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{F2.4})$$

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b+k i_s^2 & 0 & b z_{CS} & 0 & f+m i_s^2 & f z_{CS} \\ b+k i_r^2 & -b y_{CS} & -f-m i_r^2 & 0 & f z_{CS} & f y_{CS} \\ b i_p^2+k i_\omega^4 & -f y_{CS} & f z_{CS} & f i_p^2+m i_\omega^4 & h y_{CS} & h z_{CS} \\ h+4 e i_r^2 & 0 & h+4 e i_s^2 & h y_{CS} & h z_{CS} & h i_p^2+4 e i_\omega^4 \\ h+4 e i_s^2 & h y_{CS} & h z_{CS} & h i_p^2+4 e i_\omega^4 & h i_p^2+4 e i_\omega^4 & h i_p^2+4 e i_\omega^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b+k i_s^2 & 0 & b z_{CS} & 0 & -f-m i_s^2 & -f z_{CS} \\ b+k i_r^2 & -b y_{CS} & f+m i_r^2 & 0 & -f y_{CS} & -f z_{CS} \\ b i_p^2+k i_\omega^4 & f y_{CS} & -f z_{CS} & -f i_p^2-m i_\omega^4 & h y_{CS} & h z_{CS} \\ h+4 e i_r^2 & 0 & h+4 e i_s^2 & h y_{CS} & h z_{CS} & h i_p^2+4 e i_\omega^4 \\ h+4 e i_s^2 & h y_{CS} & h z_{CS} & h i_p^2+4 e i_\omega^4 & h i_p^2+4 e i_\omega^4 & h i_p^2+4 e i_\omega^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-k i_s^2 & 0 & c z_{CS} & 0 & -g+m i_s^2 & -g z_{CS} \\ 0 & 0 & c-k i_r^2 & -c y_{CS} & g-j i_r^2 & 0 & -g y_{CS} \\ 0 & c z_{CS} & -c y_{CS} & c i_p^2-k i_\omega^4 & g y_{CS} & -g z_{CS} & -g i_p^2+m i_\omega^4 \\ 0 & 0 & -g+m i_r^2 & -g y_{CS} & -j-e i_r^2 & 0 & -j y_{CS} \\ 0 & g-m i_s^2 & 0 & g z_{CS} & 0 & -j-e i_s^2 & -j z_{CS} \\ 0 & g z_{CS} & g y_{CS} & g i_p^2-m i_\omega^4 & -j y_{CS} & -j z_{CS} & -j i_p^2-e i_\omega^4 \end{bmatrix},$$

$$a=1/6, \quad b=13/35, \quad c=9/70, \quad e=1/30,$$

$$f=11L/210, \quad g=13L/420, \quad h=L^2/105, \quad (\text{F2.4a})$$

$$j=L^2/140, \quad k=6/5L^2, \quad m=1/10L,$$

$$i_r^2 = I_r/A, \quad i_s^2 = I_s/A, \quad i_p^2 = i_r^2 + i_s^2 + y_{CS}^2 + z_{CS}^2, \quad i_\omega^4 = I_\omega/A.$$

Diagonál tömegmátrix: $\mathbf{m}_{(14,14)} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_n \end{bmatrix},$

$$\text{diag } \mathbf{m}_n = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & i_p^2 & (i_r^2 + z_{CS}^2 + L^2/48) & (i_s^2 + y_{CS}^2 + L^2/48) & i_\omega^4 \end{bmatrix}. \quad (\text{F2.5})$$